Tema 2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.1 Métodos directos.

2.1.1 Sistema de ecuaciones lineales en forma matricial.

2.1.2 Solución de sistema de ecuaciones lineales.

2.1.3 Matrices de forma especial. Identidad, diagonal, triangular.

2.1.4 Eliminación de Gauss.

2.1.5 Estrategias de pivoteo

2.1.6 Factorización A=LU. Costo de computación

2.1.7 Matriz permutación. Factorización PA=LU.

Sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

Un sistema lineal, es un **conjunto de ecuaciones lineales**, por ejemplo:

$$\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & =-1 \\ -x_1 & +0.5x_2 & -x_3 & =0 \end{array}$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos x_1, x_2, x_3 **que satisfacen las ecuaciones.**

La capacidad de resolver sistemas lineales es muy importante porque **muchos problemas de ingeniería se describen mediante sistemas de ecuaciones lineales**. Si un sistema físico es descrito por **ecuaciones no lineales** este sistema de ecuaciones no lineales debe estar **transformado en una forma lineal** (se llama **linealización**) y luego podemos resolver este sistema lineal.

Sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

Los sistemas de ecuaciones lineales **se pueden representar de forma matricial**. Si tenemos por ejemplo, un sistema de ecuaciones con ***m*** ecuaciones y ***n*** incógnitas escrito en forma ordinaria como:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Su representación de forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o $\quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

Sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

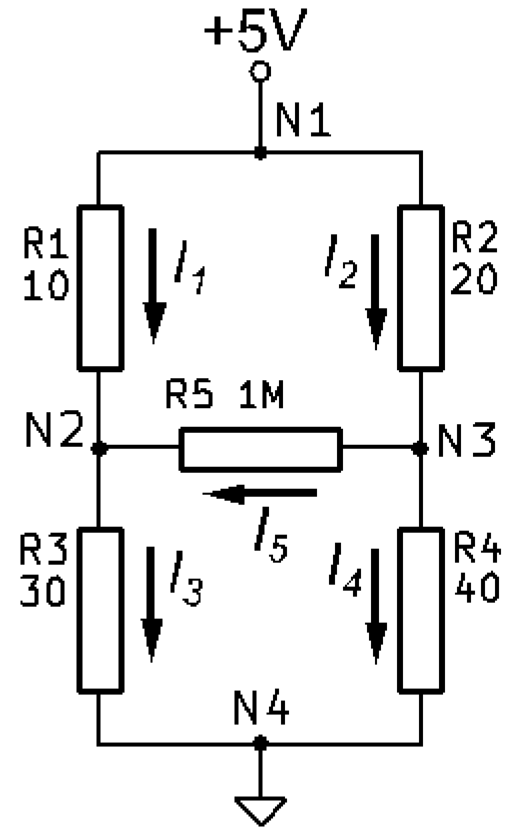
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Donde **A** es la **matriz** (de ***m*** renglones por ***n*** columnas) **de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales**, **X** es el **vector de variables desconocidas** y **B** es el **vector de términos independientes**.

La matriz [**A|B**] que resulta al agregarle a la matriz de coeficientes **A** el vector columna **B** se define como la **matriz** de coeficientes **ampliada** del sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Un ejemplo del problema. Puente de Wheatstone.



Conocidos:

R1, R2, R3, R4, R5, U1, U4

Desconocidos:

I1, I2, I3, I4, I5, U2, U3   (7 variables)

Usando las leyes de Kirchhoff (KCL y KVL) escribe un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial **(AX=B)** que describen el circuito electrónico dado.

X=[I1, I2, I3, I4, I5, U2, U3]^T **- vector columna**

Un ejemplo del problema. Puente de Wheatstone.

Ecuaciones de KVL

$U1-U2=R1*I1$ => $R1*I1+U2=U1$ (1)

$U1-U3=R2*I2$ => $R2*I2+U3=U1$ (2)

$U2-U4=R3*I3$ => $R3*I3-U2=-U4$ (3)

$U3-U4=R4*I4$ => $R4*I4-U3=-U4$ (4)

$U3-U2=R5*I5$ => $R5*I5+U2-U3=0$ (5)

Ecuaciones de KCL

N2: $I1-I3+I5=0$ (6)

N3: $I2-I4-I5=0$ (7)

Un ejemplo del problema. Puente de Wheatstone.

Ecuación	A							X	B
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	U_2	U_3		
1	R_1	0	0	0	0	1	0	I_1	U_1
2	0	R_2	0	0	0	0	1	I_2	U_1
3	0	0	R_3	0	0	-1	0	I_3	$-U_4$
4	0	0	0	R_4	0	0	-1	I_4	$-U_4$
5	0	0	0	0	R_5	1	-1	I_5	0
6	1	0	-1	0	1	0	0	U_2	0
7	0	1	0	-1	-1	0	0	U_3	0

$R_1 I_1 + U_2 = U_1$ (1), $R_2 I_2 + U_3 = U_1$ (2), $R_3 I_3 - U_2 = -U_4$ (3)

$R_4 I_4 - U_3 = -U_4$ (4), $R_5 I_5 + U_2 - U_3 = 0$ (5)

$I_1 - I_3 + I_5 = 0$ (6), $I_2 - I_4 - I_5 = 0$ (7).

Un ejemplo del problema. Puente de Wheatstone.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & R3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ U2 \\ U3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} U1 \\ U1 \\ -U4 \\ -U4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolveremos este sistema más adelante. Y ahora vamos a estudiar la solución de los sistemas más simples

Solución del sistema de ecuaciones lineales.

Solución de un sistema: es cada conjunto de valores del vector de variables desconocidas ***X*** que satisface a todas las ecuaciones del sistema lineal.

Los sistemas lineales se pueden clasificar en **incompatibles** y **compatibles**.

Incompatible es cuando **no tiene solución**. Ninguno de los vectores **X** satisfacen ecuaciones del sistema **AX=B**.

Compatible es cuando tiene solución. Este puede ser **compatible determinado**, es decir que tiene **una sola solución**, o **compatible indeterminado**, que tiene **infinitas soluciones**.

Matrices de forma especial.

Matriz identidad

Si un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{llll} 1\,x_1 & +0\,x_2 & +0\,x_3 & =b_1 \\ 0\,x_1 & +1\,x_2 & +0\,x_3 & =b_2 \\ 0\,x_1 & -0\,x_2 & +1\,x_3 & =b_3 \end{array}$$

tiene una matriz de los coeficientes de tamaño *n x n* en forma de matriz identidad

$$\mathbf{A}=\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

la solución del sistema es $\mathbf{X}=\mathbf{B}$ o $x_i=b_i,\ i=1,\ldots,n$

Matrices de forma especial.

Matriz diagonal

Si un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =b_1 \\ 0x_1 & -a_{22}x_2 & +0x_3 & =b_2 \\ 0x_1 & -0x_2 & +a_{33}x_3 & =b_3 \end{array}$$

tiene una matriz de los coeficientes de tamaño *n x n* en forma de matriz diagonal

$$\mathbf{A}=\begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{array}$$

la solución del sistema es $x_i=\dfrac{b_i}{a_{ii}},\ i=1,\ldots,n$

Matrices de forma especial.

Sistemas triangulares. Cuando una matriz $n\,x\,n$ de coeficientes de un sistema lineal tiene forma triangular

Superior o **Inferior**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n\,n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

y elementos de matriz $a_{k\,k} \neq 0, \quad \forall\, k = 1,\, 2,\, ...\, n$, la solución del sistema se realiza mediante **sustitución regresiva** para la matriz triangular superior y una **sustitución progresiva** para la matriz triangular inferior.

Sustitución progresiva

$$a_{11}x_1+0x_2+0x_3=b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+0x_3=b_2 \qquad (2)$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (1) se tiene que $x_1=\dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Ahora, conocido x_1 se puede encontrar el valor de x_2 . De la ecuación (2) se tiene que $x_2=\dfrac{b_2-a_{21}x_1}{a_{22}}$.

De la ecuación (3) se tiene que $x_3=\dfrac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$.

O para cualquier $x_i=\dfrac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i=1,2,\ldots,n$

Sustitución regresiva

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \qquad (1)$$
$$0x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \qquad (2)$$
$$0x_1+0x_2+a_{33}x_3=b_3 \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

De la ultima ecuación se tiene que $x_3=\frac{b_3}{a_{33}}$.

Ahora, conocido x_3 se puede encontrar el valor de x_2 . De la ecuación (2) se tiene que $x_2=\frac{b_2-a_{23}x_3}{a_{22}},$.

De la ecuación (1) se tiene que $x_1=\frac{b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3}{a_{11}},$

O para cualquier

$$x_i=\frac{b_i-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i=n,n-1,\ldots,1$$

Ejemplos de los sistemas triangulares

Mostrar que el sistema
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 20 \\ & & -2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

tiene solución única $\mathbf{X}^{\mathbf{T}}=(3,-4,-1,2)$ (vector transpuesto)

Mostrar que el sistema
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 20 \\ & & 0x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & = & -7 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

no tiene solución ninguna, porque de la ultima ecuación $x_4=2$. Si sustituimos x_4 en las segundo y tercero ecuaciones recibimos.

$$\begin{array}{lll} 7x_3-8=-7 & x_3\Rightarrow & 1/7 \\ 6x_3+10=\ 4 & x_3\Rightarrow & -1 \end{array}$$

que es imposible.

Ejemplos de los sistemas triangulares

Mostrar que el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 20 \\ & & 0x_2 & + & 7x_3 & + & 0x_4 & = & -7 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ & & & & & & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

tiene mucho soluciones.

De la ultima ecuación $x_4=2$. De la penúltima equitación $x_3=-1$. De la segunda ecuación $x_3=-1$. Sustituimos las x's en la ecuación uno y recibimos que $x_2=4x_1-16$.

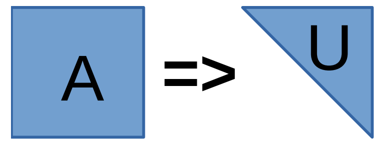
x_2 **depende** de x_1.

Entonces el sistema tiene un **conjunto infinito** de soluciones.

Eliminación de Gauss.

El método de eliminación de Gauss resuelve los sistemas de **forma general** $\mathbf{AX=B}$ de n ecuaciones y n incógnitas.

La **idea del método** es **transformar** el sistema original $\mathbf{AX=B}$ en **un sistema triangular** superior $\mathbf{UX=Y}$ y después resolver dicho sistema con la técnica de sustitución regresiva.



Existen **tres operaciones elementales** sobre los renglones de una matriz ampliada [**A**|**B**], las cuales se **usan para transformar** la matriz **A en matriz triangular superior U**.

1. Intercambio dos renglones de la matriz $renglón_r <=> renglón_p$.

2. Multiplicación un renglón de la matriz por un escalar $l \neq 0$.

3. Suma de un renglón de la matriz con otro renglón. $renglón_r = renglón_r - l_{rp} renglón_p$. **Estas operaciones con renglones no cambian la solución del sistema lineal.**

Eliminación de Gauss. Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -2 \\
4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\
5x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

La **matriz ampliada.**

$$
C = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{(1)} & -2 & -4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right]
$$

Estamos en la primera columna $(p=1)$. El elemento de pivote es c_{11}. Queremos obtener 0 en segunda fila $(r=2)$, en la posición c_{21}, usando operaciones elementales $renglón_2 = renglón_2 - l_{21}\, renglón_1$. Escribimos esta operación solo para el elemento c_{21}. Obtenemos $c_{21} = c_{21} - l_{21} c_{11}$.

Eliminación de Gauss. Ejemplo

Como queremos que $c_{21}=0$, entonces el coeficiente l_{21} debería ser $0=c_{21}-l_{21}c_{11}$ => $l_{21}=c_{21}/c_{11}=4/1=4$.

Al finalizar la operación $renglón_2=renglón_2-l_{21}renglón_1$, tendremos 0 en la posición c_{21} .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{(1)} & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 13 & 19 & 13 \\ 5 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

Para obtener 0 en la tercera fila (r = 3) de la primera columna en la posición c_{31} el coeficiente l_{31} se puede calcular de la fórmula $0=c_{31}-l_{31}c_{11}$. Por lo tanto, $l_{31}=c_{31}/c_{11}=5/1=5$.

Después de la operación $renglón_3=renglón_3-l_{31}renglón_1$, tendremos 0 en la posición c_{31} .

Eliminación de Gauss. Ejemplo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & \mathbf{(13)} & 19 & 13 \\ 0 & 13 & 29 & 13 \end{array}\right]$$

Ahora queremos obtener ceros en la columna 2. Cambiamos el pivote al renglón 2, al elemento c_{22}. El reglón de pivote es $renglón_p = renglón_2$. Para obtener 0 en posición c_{32} el coeficiente l_{32} se puede calcular de la fórmula $c_{32} = c_{32} - l_{32} c_{22}$. Por lo tanto, $0 = c_{32} - l_{32} c_{22}$ => $l_{32} = c_{32} / c_{22} = 13/13 = 1$.

se necesita multiplicar el renglón 2 por $l_{32} = 1$ y restar el producto del renglón 3. $renglón_3 = renglón_3 - l_{32} \cdot renglón_2$.

De lo que obtenemos la matriz triangular superior

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & \mathbf{(13)} & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss. Ejemplo

la cual podemos resolver con sustitución regresiva.

$$X=[0,1,0]^T$$

Para sistemas más grandes, continuaremos siguientes dos pasos hasta obtener un sistema triangular superior.

1. Cálculo del multiplicador $l_{rp}=\dfrac{c_{rp}}{c_{pp}}$

2. Eliminación de los coeficientes de la matriz

$$renglón_r=renglón_r-l_{rp}renglón_p \ ,$$

para $p=1,\ldots,n-1$ y $r=p+1,\ldots,n$,

donde *n* es el tamaño de la matriz.

Estrategias de pivoteo.

Pivoteo trivial. Puede suceder que en el proceso de eliminación de Gauss se tenga que $a_{pp}=0$, lo que implica que dicho **elemento no pueda ser tomado como elemento de pivote**. En este caso se utiliza una estrategia de pivoteo trivial, que consiste **en escoger un renglón** *k* en el que **el elemento en el columna *p* no es igual a cero** $a_{kp}\neq 0$. Este renglón se intercambia con el renglón *p*-ésimo, con lo cual se obtiene un pivote no nulo.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & + & 2 & + & 1 & + & 4 & 13 \\ 0 & - & \mathbf{(0)} & + & 2 & - & 5 & 2 \\ 0 & - & 6 & - & 2 & - & 15 & -32 \\ 0 & + & 7 & + & 6 & + & 14 & 45 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & + & 2 & + & 1 & + & 4 & 13 \\ 0 & - & \mathbf{(6)} & - & 2 & - & 15 & -32 \\ 0 & - & 0 & + & 2 & - & 5 & 2 \\ 0 & + & 7 & + & 6 & + & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Estrategias de pivoteo.

Pivoteo parcial. Es posible que al utilizar el pivoteo trivial se produzcan errores porque como es sabido, las computadoras utilizan aritmética de precisión finita. Por ejemplo: se desea resolver el siguiente sistema de ecuaciones haciendo operaciones con una **precisión de cuatro cifras significativas**.

$$1.133\,x_1 + 5.281\,x_2 = 6.414$$
$$24.14\,x_1 - 1.21\,x_2 = 22.93$$

La **solución del sistema es exactamente** $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ **.**

Si se toma el elemento a_{11} como pivote, el multiplicador debería ser $24.14/1.133 = 21.31$, por lo que se tendría:

$$1.133\,x_1 + 5.281\,x_2 = 6.414$$
$$-113.7\,x_2 = 113.8$$

por lo tanto: $x_1 = 1.001$ y $x_2 = 0.9956$

El error se comete debido a que el valor del multiplicador 21.31 es muy grande.

Estrategias de pivoteo.

Para evitar este error se pueden intercambiar las ecuaciones de la siguiente manera:

$$24.14\,x_1 - 1.21\,x_2 = 22.93$$
$$1.133\,x_1 + 5.281\,x_2 = 6.414$$

Ahora el elemento de pivote es el número 24.14, y el valor multiplicador 1.133/24.14=0.04593 con lo que resulta el sistema:

$$24.14\,x_1 + 1.21\,x_2 = 22.93$$
$$5.338\,x_2 = 5.338$$

De modo que se tiene la solución exacta: $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$

La estrategia mostrada anteriormente se conoce como **pivoteo parcial**, el cual consiste en tomar como **pivote el coeficiente de mayor magnitud en la columna.** $|a_{pp}| = max\{|a_{pp}|, |a_{p+1\,p}|, \ldots, |a_{np}|\}$

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Ejemplo

Solucionar el sistema por eliminación de Gauss con pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -16 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada.

C= $\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ -8 & 2 & -4 & 0 & -16 \\ -4 & 1 & -5 & 2 & -9 \\ 4 & -6 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right]$

Estamos en la primera columna $(p=1)$. De acuerdo con la estrategia de pivoteo parcial, debemos tener en la posición (1, 1) un elemento con una magnitud máxima de la columna.

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Ejemplo

La magnitud máxima tiene el elemento c_{21}. Por lo tanto, tenemos que intercambiar renglón 1 con renglón 2. Después de primero pivoteo parcial tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} (\mathbf{-8}) & 2 & -4 & 0 & -16 \\ -4 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ -4 & 1 & -5 & 2 & -9 \\ 4 & -6 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Usamos eliminación de Gauss. Obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 2 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -13 \end{array}\right]$$

Ahora el pivote elemento es c_{22}. Como $|c_{42}| > |c_{22}|$ tenemos que intercambiar renglón 4 con renglón 2.

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Ejemplo

Después de pivoteo parcial tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 2 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & (\mathbf{-5}) & -1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss nos da

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 2 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & (\mathbf{-3}) & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1 & 0.4 \end{array}\right]$$

Ahora el elemento de pivote es a_{33} . Como $|a_{33}|>|a_{43}|$ no hay intercambio de renglones en este paso.

Eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Ejemplo

Después de eliminación de Gauss obtenemos la matriz triangular superior

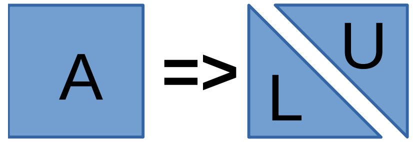
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 2 & -4 & 0 & -16 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{array}\right]$$

la cual podemos resolver con sustitución regresiva.

$$X=[1,2,3,4]^T$$

Factorización LU.

La idea del método es **transformar la matriz original A en producto de dos matrices L y U**,



donde **L** es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a 1 y **U** es una matriz triangular superior

A **=** **L** **U**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Factorización LU.

Si el intercambio de renglones no es necesario, entonces cuando se utiliza la eliminación de Gauss, los multiplicadores l_{rp} son los coeficientes del matriz ***L*** en posiciones *r p*.

Ejemplo. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ => $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ =>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

L **U**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

Solución el sistema lineal (en forma LUX=B)

Supongamos que ya tenemos **LU** factorización. Cómo utilizar esta factorización para resolver el sistema? Es decir, cómo calcular **X**?

Si **AX = B** es un sistema lineal, donde **A** tiene factorización **LU**, entonces el sistema se puede escribir como **LUX = B**

Para resolver el sistema **LUX = B** definimos que **Y = UX** y después resolvemos dos sistemas

1. **LY = B** para obtener **Y** y luego

2. **UX = Y** para obtener **X**

Tenga en cuenta **que no usamos la parte derecha (términos independientes) del sistema lineal en la etapa de la factorización**.

La parte derecha se utiliza después de factorización sólo cuando se resuelve el sistema lineal.

Solución el sistema lineal (en forma LUX=B)

Ejemplo. Tenemos el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
4x_1 &+ 3x_2 &- x_3 &= 7 \\
-2x_1 &- 4x_2 &+ 5x_3 &= 5 \\
x_1 &+ 2x_2 &+ 6x_3 &= 23
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccc}
\textbf{A} & & \textbf{X} & & \textbf{B} \\
\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Factorización **LU** de la matriz **A** nos da.

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} =
\begin{array}{cc}
\textbf{L} & \textbf{U} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Resolvemos **LY = B** para obtener **Y**, donde **Y=UX**

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}
$$

Solución el sistema lineal (en forma LUX=B)

Con sustitución progresiva tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8.5 \\ 25.5 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos **UX = Y** para obtener **X**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8.5 \\ 25.5 \end{bmatrix}$$

Con sustitución regresiva tenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$. Verificación $$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Costo de computación de eliminación de Gauss

Operaciones elementales del método de Gauss sin pivoteo según el tamaño de la matriz *N*

N	**Numero de operaciones**
5	115
10	805
100	681,550
1000	6.68*10^8

El costo computacional del método de Gauss es proporcional a N^3 **.**

Si se tiene un rendimiento del PC con Intel® Core™2 Duo processor, 45nm, Clock Speed 3.33 GHz, es ~13 GFLOPS (13*10^9) entonces para resolver de la matriz 1000x1000 se necesitan 0.05 segundos.

Costo de computación de factorización

El costo de factorización es ~ N^3

$$\sum_{p=1}^{N-1}(N-p)(N-p+1)=\frac{N^3-N}{3}$$ multiplicaciones y divisiones

$$\sum_{p=1}^{N-1}(N-p)(N-p)=\frac{2N^3-3N^2+N}{6}$$ sustracciones.

El costo de la solución del sistema lineal es ~ N^2

Solución **LY=B** => $(N^2-N)/2$ multiplicaciones y sustracciones

Solución **UX=Y** => $(N^2+N)/2$ multiplicaciones y divisiones + $(N^2-N)/2$ sustracciones.

El costo de factorización de la matriz *N* x *N* es proporcional N^3 . Y **es mucho mas que el costo de solución del sistema** (N^2).

Si debemos resolver el sistema lineal muchas veces con la misma matriz **A**, pero con las columnas **B** diferentes, **no es necesario triangularizar la matriz cada vez**. Esta es la razón por la que la **factorización LU es preferida mas que la eliminación de Gauss**.

Matriz permutación

La matriz permutación es la matriz cuadrada binaria **con todos sus** ***n*****×*****n*** **elementos iguales a 0, excepto uno cualquiera por cada fila y columna, el cual debe ser igual a 1**. **Se utiliza para almacenar los cambios de los renglones durante el pivoteo**. Si tenemos la matriz **A** y matriz identidad $\mathbf{P_1}$ entonces $\mathbf{P_1A=AP_1=A}$.

$$\mathbf{P_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pero multiplicación con matriz $\mathbf{P_2}$ nos da el **cambio los renglones** 2 y 3 o **cambio de las columnas** 2 y 3

$$\mathbf{P_2}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{P_2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU

Tenemos sistema **AX=B**

Pasos para resolver un sistema usando la factorización de **PA=LU**

1. Calcular las matrices **L**, **U**, y **P**.
2. Calcular el vector columna **PB**.
3. Resolver **LY = PB** para **Y** con la sustitución progresiva.
4. Resolver **UX = Y** para **X** usando la sustitución regresiva.

Ventajas.

Supongamos que un sistema **AX = B** debe ser solucionado para una matriz **A** fija, y de varios columnas **B**. El paso 1 ($O(N^3)$) se realiza una sola vez y los pasos de 2 a 4 son utilizados para encontrar la solución **X** que corresponde a **B**. Pasos del 2 al 4 requieren solo $O(N^2)$ operaciones en lugar de las $O(N^3)$ operaciones necesarias para la factorización **A** en el paso 1.

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Solución de un sistema lineal por factorización PA=LU

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ -16 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Calcular las matrices **L**, **U**, y **P**

Crearemos la matriz de identidad **P**, la matriz cero **L**, y copiamos **A** a **U**. Obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \mathbf{L} & \mathbf{U} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factorización con intercambio de renglones:PA=LU. Ejemplo

Después de primero pivoteo parcial tenemos

$$\overset{\textbf{P}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \overset{\textbf{L}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{\textbf{U}}{\begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Usamos eliminación de Gauss. Obtenemos

$$\overset{\textbf{P}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \overset{\textbf{L}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{\textbf{U}}{\begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Ahora el pivote elemento es a_{22} . Después de pivoteo parcial tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \mathbf{L} & \mathbf{U} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Eliminación de Gauss nos da

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \mathbf{L} & \mathbf{U} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1.2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Ahora el elemento de pivote es a_{33} . Como $|a_{33}|>|a_{43}|$ no hay intercambio de renglones en este paso.

Después de eliminación de Gauss tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \mathbf{L} & \mathbf{U} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Agregamos unos a la diagonal principal de la matriz **L**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Paso 2. Calculación del vector columna **PB**.

$$\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -16 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -5 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Resolver **LY = PB** para **Y** con la sustitución progresiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -5 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -16 \\ -13 \\ -1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Paso 4. Resolver **UX = Y** para **X** usando la sustitución regresiva.

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -13 \\ -1 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Resuelva sistema con misma matriz **A** pero **con diferente vector B**

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 & 1 \\ -8 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -34 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos factorización **PA=LU** de este matriz. Entonces Comenzamos con el **paso 2**.

$$\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ -34 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ 0 \\ -21 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Factorización con intercambio de renglones: PA=LU. Ejemplo

Paso 3. Resolver **LY = PB** para **Y** con la sustitución progresiva.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ 0 \\ -21 \\ -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -34 \\ -17 \\ -4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Resolver **UX = Y** para **X** usando la sustitución regresiva.

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -17 \\ -4 \\ 0.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Preguntas de autoevaluación

1. Escribir un ejemplo del sistema de ecuaciones lineales
2. Forma matricial. La matriz de coeficientes ampliada
3. Que significa resolver un sistema de ecuaciones lineales? Que significa sistema incompatible, compatible, compatible determinado, y compatible indeterminado?
4. Sistemas triangulares. Los métodos de solución. Obtener la formula de sustitución regresiva.
5. Tres operaciones elementales sobre los renglones.
6. El método eliminación de Gauss.
7. Pivoteo trivial, pivoteo parcial
8. Método eliminación de Gauss con pivoteo parcial
9. Factorización A=LU. Solución del sistema LUx=B
10. Costo de computación
11. Matriz permutación.
12. Factorización PA=LU. Solución del sistema LUx=PB

Practica 1.

Desarrollar las programas

1. Solución del sistema lineal triangular superior con sustitución regresiva
2. Solución del sistema lineal triangular inferior con sustitución progresiva
3. Solución el sistema lineal con eliminación de Gauss con pivoteo parcial
4. Solución el sistema lineal con factorización PA=LU
5. Solución el sistema lineal con funciones de librería de Scilab

Funciones de librería de Scilab

chfact — sparse Cholesky factorization

chol — Cholesky factorization

chsolve — sparse Cholesky solver

cond — condition number

det — determinant

inv — matrix inverse

linsolve — linear equation solver

lsq — linear least square problems

lu — LU factorization with pivoting

qr — QR decomposition

rank — rank

rref — computes matrix row echelon form by lu transformations

sqroot — W*W' hermitian factorization

svd — singular value decomposition

trace — trace

Factorizacion LU con función lu de Scilab

-->help lu

lu — LU factorization with pivoting

Calling Sequence

[L,U]= lu(A)

[L,U,E]= lu(A)

Parameters

A - real or complex matrix (m x n).

L - real or complex matrices (m x min(m,n)).

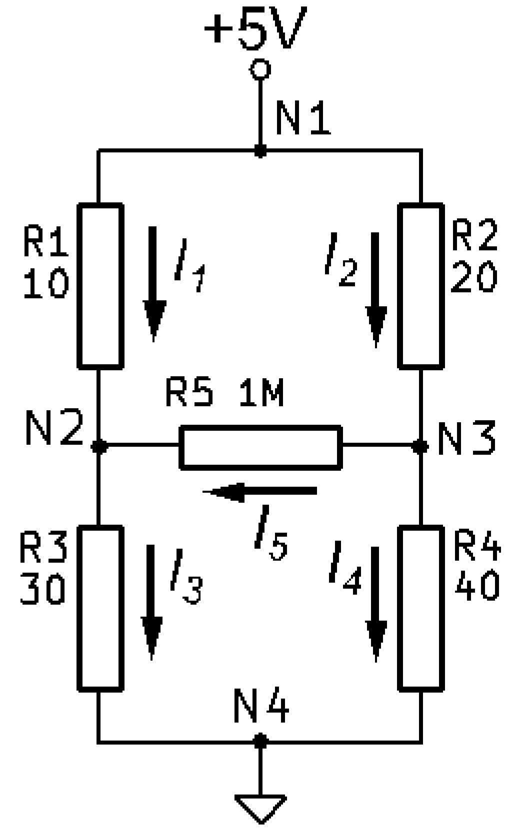
U - real or complex matrices (min(m,n) x n).

E - a (n x n) permutation matrix.

Solución los sistemas lineales en Scilab

Puente de Wheatstone.

Tenemos el sistema **AX=B.** Donde



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

X=[I1, I2, I3, I4, I5, U2, U3]^T **- vector columna**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -0 & -0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

En Scilab: X=A\B

o [L,U,P]=lu(A); PB=P*B; Y=L\PB; X=U\Y