

Tema 2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

2.2 Métodos iterativos.

2.2.1 Normas vectoriales

2.2.2 Convergencia. Tasas de convergencia

2.2.3 Aplicación (mapeo) contractiva

2.2.4 Iteración de punto fijo

2.2.5 Error absoluto, error relativo y cifras significativas

2.2.6 Error de convergencia. Criterios de terminación

2.2.6 Método Jacobi

2.2.7 Método Gauss-Seidel

Métodos directos e iterativos.

Los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse en métodos **directos** y métodos **iterativos**.

Los **métodos directos** son aquellos que resuelven el sistema de ecuaciones lineales en un **determinado número de pasos**, es decir, que existe un número de operaciones finitas que se deben realizar para resolver el sistema. El ejemplo de los métodos directos es el método de **eliminación de Gauss** y método de **factorización LU**.

Los **métodos iterativos** son aquellos que van **calculando progresivamente aproximaciones** a la solución del sistema. El **número de iteraciones** para llegar al resultado es **desconocido** en un principio. Dentro de los métodos iterativos se encuentran los métodos de **Jacobi** y **Gauss-Seidel**.

Métodos directos vs. iterativos. Ejemplo

Zenón de Elea: La paradoja de Aquiles y la tortuga

La distancia entre Aquiles y la tortuga = 1000 pasos.

Velocidad de Aquiles = 10 pasos/seg.

Velocidad de la tortuga = 1 paso/seg.

En 100 seg. Aquiles hace 1000 pasos; la tortuga = 100

En 10 seg. Aquiles hace 100 pasos; la tortuga = 10

En 1 seg. Aquiles hace 10 pasos; la tortuga = 1

Entonces Aquiles nunca ganará la carrera!

Solución analítica

$$10t - t = 1000 \Rightarrow t = \frac{1000}{9} = 111 \frac{1}{9}$$

Formula iterativa

$$t = 100 + \frac{t}{10} \quad \text{o} \quad t_{k+1} = 100 + \frac{t_k}{10}$$

Elegimos el valor inicial de solución $t_0 = 100$.

Métodos directos vs. iterativos. Ejemplo

Usamos valor inicial de t en formula iterativa

$$\text{iteración 1: } t_1 = 100 + \frac{t_0}{10} = 100 + \frac{100}{10} = 110$$

$$\text{iteración 2: } t_2 = 100 + \frac{t_1}{10} = 100 + \frac{110}{10} = 111$$

$$\text{iteración 3: } t_3 = 100 + \frac{t_2}{10} = 100 + \frac{111}{10} = 111.1$$

Entonces tenemos **aproximaciones sucesivas de solución** t_k que **convergen** a solución exacta $t_k = 100, 110, 111, 111.1, \dots$

Esto es un ejemplo de uso el método iterativo.

Por desgracias **no siempre un método iterativo se converge.**

Si, en lugar de la tortuga, Aquiles va correr con un caballo, que tiene vellosidad 20 pasos/seg., la solución analitica va

$$10t - 20t = 1000 \Rightarrow t = -100$$

Formula iterativa $t = 100 + 2t$, con valor inicial $t_0 = 100$ nos da la sucesión que **diverge**. $t_k = 100, 300, 700, \dots$

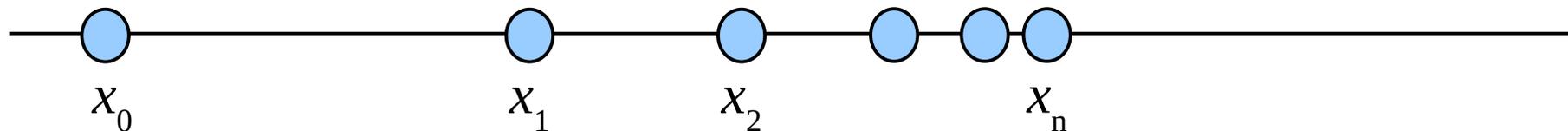
Métodos iterativos

Un método iterativo trata de resolver un problema (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante **aproximaciones sucesivas** a la solución, empezando desde una **estimación inicial**. Entonces, para solución de un problema nos necesita **estimación inicial x_0** , una **función iterativa $x = g(x)$** (o $x_{k+1} = g(x_k)$) y **criterio de terminación** de proceso iterativo.

Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones **$Ax=B$** encontrando la inversa de la matriz **A**). Los métodos iterativos son **única opción para ecuaciones no-lineales**.

Los métodos **iterativos** son **útiles** para resolver **problemas** lineales que involucran un **número grande de variables** (a veces del orden de millones), donde los **métodos directos** tendrían un **costo computacional muy grande** y tienen **grandes errores** por la propagación de los errores

En el resultado de iteraciones recibimos la sucesión de las soluciones aproximadas. $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$



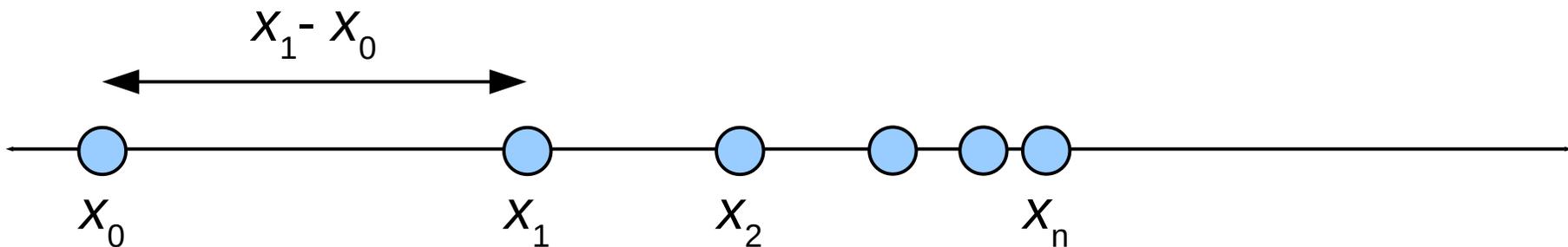
La distancia

Quando terminar el proceso iterativo?

Es razonable terminar iteraciones **cuando soluciones aproximados va cerca de solución exacta**. Pero no sabemos solución exacta. Por lo tanto se puede terminan el proceso de iteración cuando la distancia entre dos soluciones consecutivas es menor que la precisión (tolerancia) deseada.

Como medir la distancia?

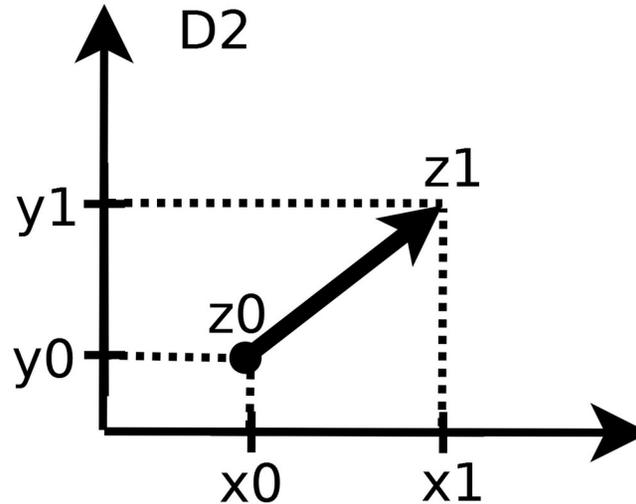
Caso 1D



Distancia entre x_0 y x_1 es $d = x_1 - x_0$

La distancia

Caso 2D



Soluciones consecutivas son $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$

Distancia (euclidiana) entre $z_0(x_0, y_0)$ y $z_1(x_1, y_1)$ es

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

No es **única** forma de definir la distancia en espacio 2D.

(Ejemplo con calles en un ciudad.)

$$d = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

Normas en un espacio vectorial

Norma de espacio es una forma de definir la distancia en este espacio.

Una norma sobre \mathbb{R}^n es una función $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (el resultado de la norma será el escalar) con las siguientes **propiedades**

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

2. $\|ax\|=|a| \|x\|$, donde $a \in \mathbb{R}$

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *

* si $y = -x$, $0 < 2\|x\|$, si $y = x$, $\|x+x\| = \|x\| + \|x\|$

La primera condición implica que **una norma siempre es positiva y es nula siempre y cuando el vector sea el vector nulo.**

La segunda propiedad es la homogeneidad de la norma y la tercera condición es más conocida como **desigualdad del triángulo.**

Normas en un espacio vectorial

Las **normas más usuales** en \mathbb{R}^n son las siguientes

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ norma Euclidiana

3. $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ para $p \geq 1$

4. $\|x\|_\infty = \max |x|$ norma máxima o infinita

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes. Es decir, si dos puntos están cerca en la norma $\| \cdot \|_1$, entonces ellos también están cerca en la norma Euclidiana.

Ejemplo

$$a = [-1, 2, -3]$$

$$b = [1, 2, 3]$$

$$c = a - b = [-2, 0, -6]$$

$$\|c\|_1 = |-2| + |0| + |-6| = 8$$

$$\|c\|_2 = \sqrt{|-2|^2 + |0|^2 + |-6|^2} = \sqrt{40}$$

$$\|c\|_{\max} = \max(|-2| + |0| + |-6|) = 6$$

La convergencia de sucesión. Tazas de la convergencia.

La sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a $x^* \in \mathbb{R}^n$ si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - x^*\| = 0$

donde x^* es la solución exacta.

Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a x^* :

1. Si existe una constante $\alpha \in (0;1)$ y un entero $k_1 \geq 0$ tal que, para todo $k \geq k_1$ $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_k - x^*\|$ se dice que $\{x_k\}$ es por lo menos **linealmente convergente** a x^* . Esto garantiza que eventualmente, el error decrecerá por un factor $\alpha < 1$

2. $\{x_k\}$ converge por lo menos **superlinealmente** a x^* si, $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha_k \|x_k - x^*\|$ para alguna sucesión $\{\alpha_k\}$, la **cual converge a cero**.

3. Si existen constantes $p > 1$, $\alpha > 0$, $k_1 \geq 0$, tal que para todo $k \geq k_1$ $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \alpha \|x_k - x^*\|^p$ entonces, decimos que $\{x_k\}$ **converge a x^* con orden** al menos p .

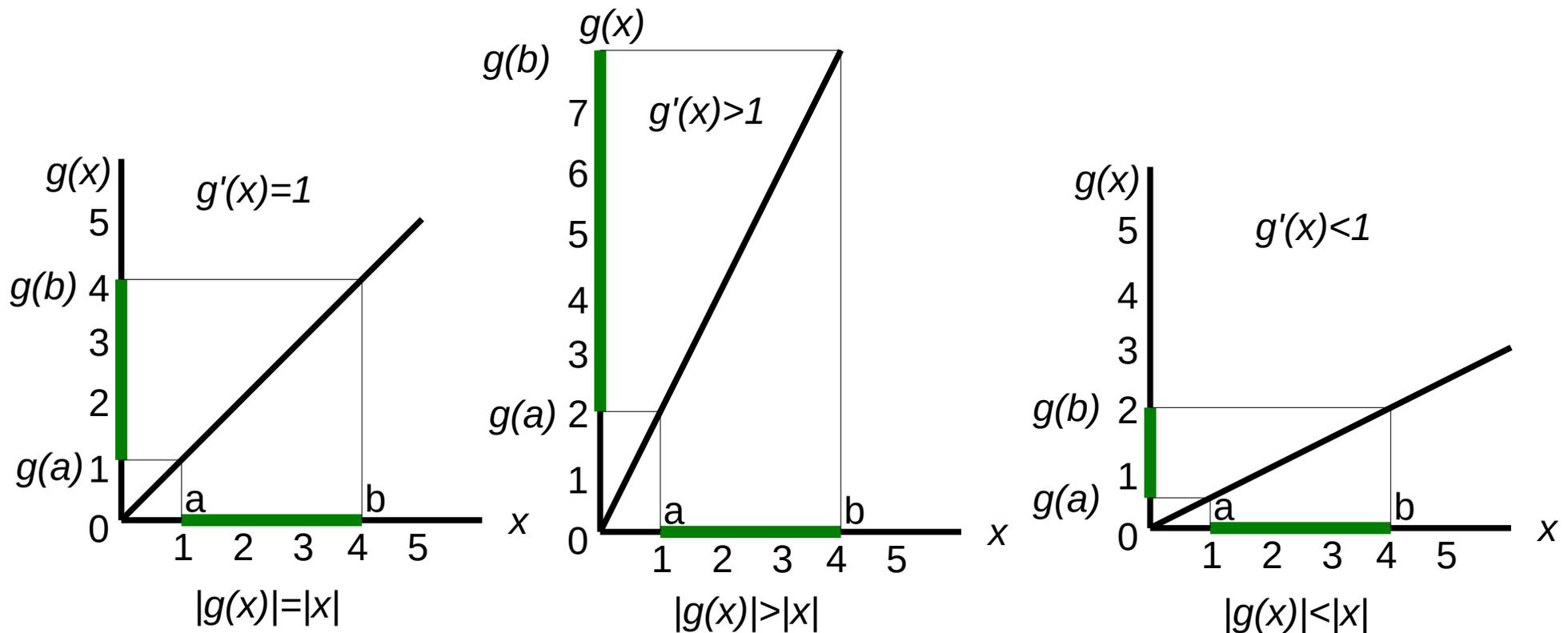
Si $p=2$ o $p=3$, decimos que la convergencia es al menos cuadrática o cúbica, respectivamente.

Aplicación (mapeo) contractiva

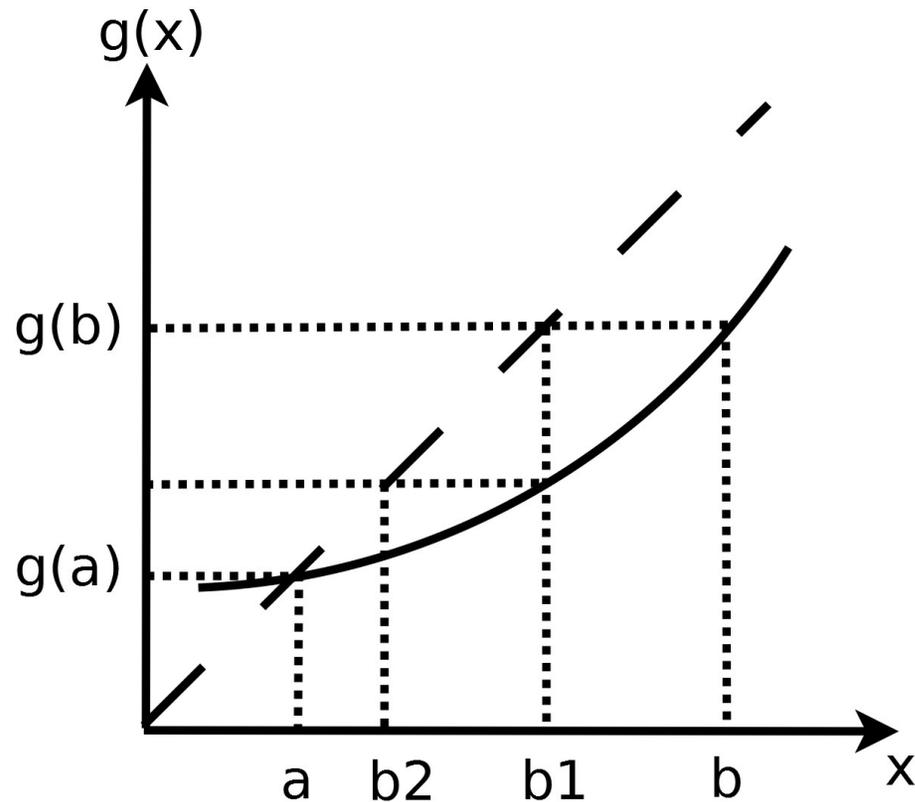
Una aplicación $g(x):\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **aplicación contractiva** si la **distancia entre objetos es mayor que la distancia entre sus imágenes**. $\|g(b)-g(a)\| \leq r\|b-a\|$, con $0 < r < 1$; r es razón de la **contracción**.

Otro indicio que una aplicación $g(x)$ es una **aplicación contractiva** es $|g'(x)| < 1$.

Ejemplos con las funciones lineales



Aplicación (mapeo) contractiva

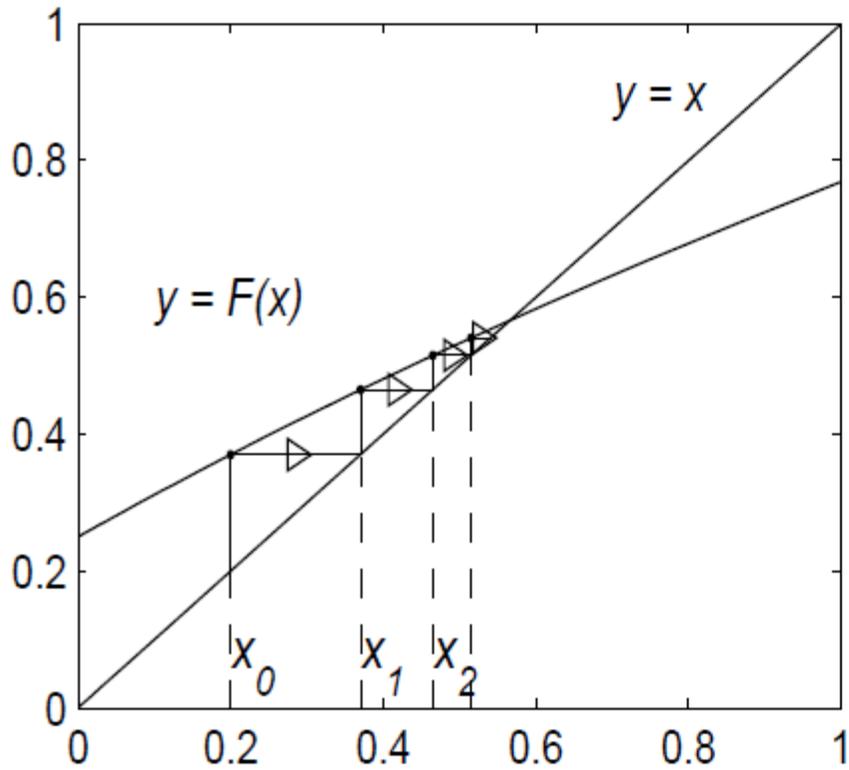


Si tenemos mapeo $x = g(x)$
Si mapeo $x = g(x)$ es un mapeo contractivo. Entonces cada siguiente mapeo reduce la longitud del segmento $[a, b]$. Como el resultado, el segmento se reduce a un **punto, que se llama un punto fijo.**

Un **punto fijo** de una función g es un valor p tal que $g(p) = p$.

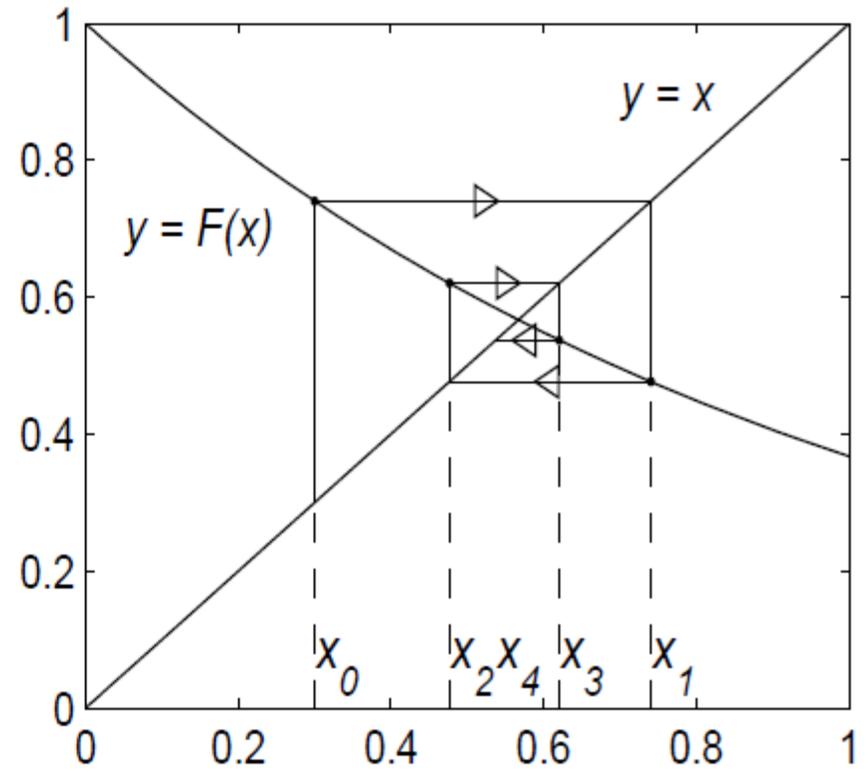
Un **punto fijo** de una función $g(x)$ esta en **punto de intersección de grafico de la función y recta $x = y$**

Ejemplos de la convergencia



$$0 < F'(x) < 1$$

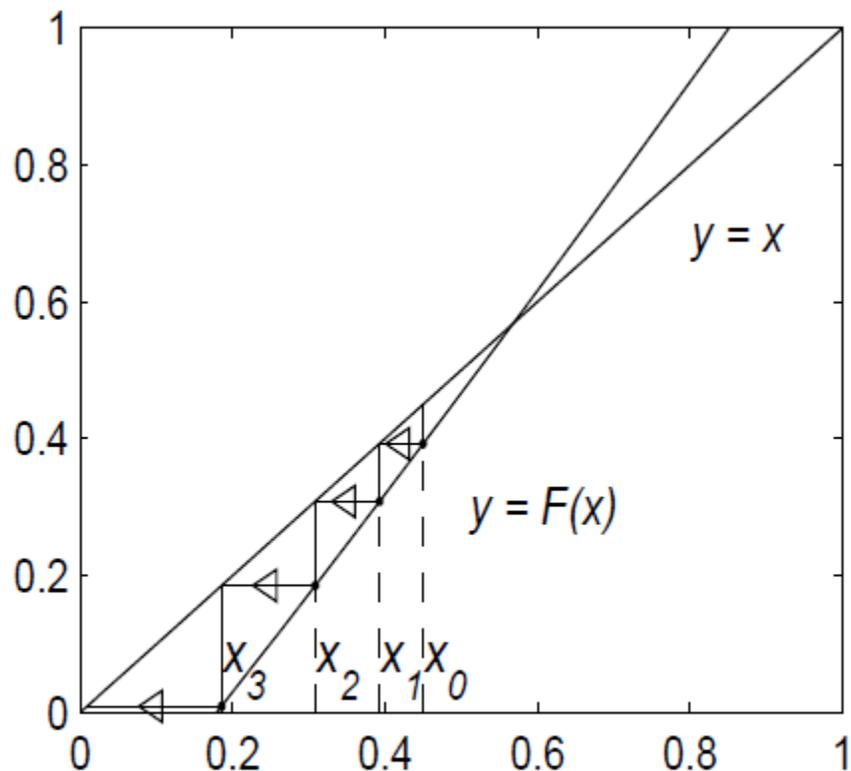
convergencia monótona



$$-1 < F'(x) < 0$$

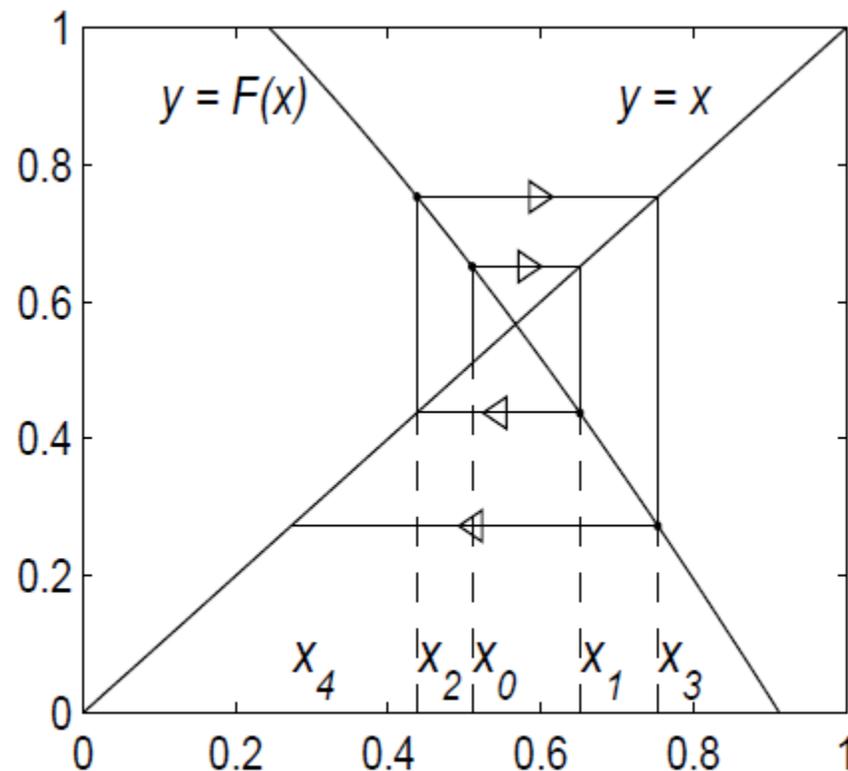
convergencia no monótona

Ejemplos de la divergencia



$$F'(x) > 1$$

divergencia monótona



$$F'(x) < -1$$

divergencia no monótona

Iteración de punto fijo

En ingles: **simple iteration** o **successive approximation method**

Si una ecuación $f(x)=0$ puede ponerse en la forma $g(x)=x$, y una solución x es un **punto fijo** atractivo de la función g , entonces puede empezar con un punto x_1 en la base de atracción de x , y sea $x_{n+1}=g(x_n)$ para $n \geq 1$, y la secuencia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ convergerá a la solución x .

Conexiones entre dos problemas: búsqueda de los puntos fijos y búsqueda de las raíces ($f(x)=0$). Si g tiene punto fijo p , entonces $f(x)=g(x)-x$ tiene un cero en p . Si f tiene una raíz p , entonces $g(x)=x-f(x)$ tiene punto fijo p .

Hay muchas formas de construir función iterativa $g(x)$.

Por ejemplo ecuación $ax^2+bx+c=0$ fácil transformar a $x_{k+1}=\frac{ax_k^2+c}{-b}$ y ecuación $\sin(x)=0$ a $x_{k+1}=x_k-\sin(x)$. Sin embargo, la función iterativa debe ser **contractiva**.

Error absoluto, error relativo y cifras significativas

Si p es una aproximación de p^* , entonces el **error absoluto** $Ea(p) = |p - p^*|$.

Si p es una aproximación de p^* , donde $p \neq 0$, entonces el **error relativo** $Er(p)$ es $\frac{|p - p^*|}{|p^*|}$.

El número p aproxima a p^* con t **cifras significativas** si t es el mayor entero no negativo para el cual $\frac{|p - p^*|}{|p^*|} < 5 \cdot 10^{-t}$

Si p y p^* son vectores $Ea(p) = \|p - p^*\|$ y $Er(p) = \frac{\|p - p^*\|}{\|p^*\|}$

Error absoluto de la suma. $Ea(p + q) \leq Ea(p) + Ea(q)$

Error relativo del producto. $Er(pq) \leq Er(p) + Er(q) + Er(p)Er(q)$

Error de convergencia.

Criterios de terminación (de iteraciones)

Es común que error absoluto $Ea(p) = \|p - p^*\|$ o error relativo

$Er(p) = \frac{\|p - p^*\|}{\|p^*\|}$ se usan para evaluar **error de la convergencia**. Dado

que la solución exacta p^* es incógnita, se utilizan la diferencia entre

dos aproximaciones sucesivas. $Ea_k = |p_{k+1} - p_k|$ o $Er_k = \frac{|p_{k+1} - p_k|}{|p_{k+1}|}$

Para terminar el proceso iterativo se necesita un **criterio de terminación**. Es razonable terminar iteraciones cuando **error de convergencia** en iteración k E_k **va menor que una tolerancia especificada**.
 $E_k \leq tol$.

Ambos métodos de definición de error de convergencia, y por lo tanto los criterios de parada del proceso iterativo, **tienen sus ventajas y desventajas**. El **error relativo no es la norma** del espacio de soluciones. Además, **no funciona cuando la solución es cerca de 0**.

El **error absoluto puede llevar a problemas** debido a errores por la **representación de los números en un ordenador**. Por ejemplo **cuando los valores de solución son grandes y la tolerancia pequeña**.

Método de Jacobi

Es un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sabemos que, para resolver el problema con un proceso iterativo se necesita construir una función iterativa $x = g(x)$ (o $x_{k+1} = g(x_k)$), estimación inicial x_0 y criterio de terminación.

Construcción la función iterativa.

Sea que la matriz **A** es tal que su diagonal principal no tiene elementos ceros. Representamos la matriz como una suma de tres matrices

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} ,$$

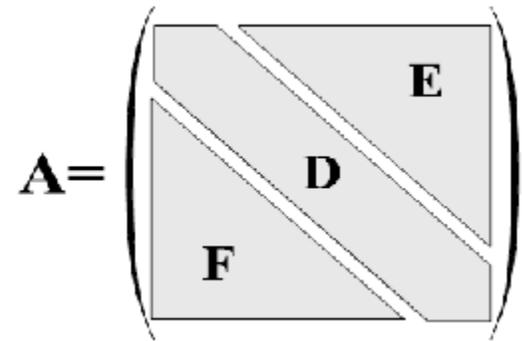
donde la matriz **D** contiene sólo los elementos diagonales de la matriz **A**, la matriz **F** contiene sólo los elementos de matriz **A** que están bajo de diagonal y la matriz **E** contiene los elementos que de matriz **A** que están sobre de la diagonal.

recuerde que los matrices E y F no es las matrices que usan para la factorizacion LU

Método de Jacobi

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$



Entonces podemos escribir el sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si tenemos una aproximación \mathbf{x}_k a la solución exacta \mathbf{x}^* del sistema, la relación $\mathbf{D} \mathbf{x}_k + \mathbf{E} \mathbf{x}_k + \mathbf{F} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$ **no se cumple**, si $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}^*$. Pero si en esta expresión reemplazamos uno o dos casos \mathbf{x}_k con \mathbf{x}_{k+1} y ordenamos que la igualdad se mantenga, entonces podemos obtener un **esquema iterativo** para mejorar la solución.

Más fácil cambiar $\mathbf{D} \mathbf{x}_k$ con $\mathbf{D} \mathbf{x}_{k+1}$.

Entonces tenemos $\mathbf{D} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{E} \mathbf{x}_k + \mathbf{F} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$. Despejamos \mathbf{x}_{k+1} .

$$\text{Recibimos } \mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{b} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \mathbf{x}_k}{\mathbf{D}}.$$

Este esquema iterativo se conoce como el **método de Jacobi**.

Método de Jacobi.

Esquema iterativa de Jacobi en forma escalar.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (3)$$

De la ecuación (1) se tiene que $x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}}{a_{11}} .$

De la ecuación (2) se tiene que $x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}}{a_{22}} .$

De la ecuación (3) se tiene que $x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}}{a_{33}} .$

O para cualquier x_i

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i=1, \dots, n$$

Método de Jacobi. Ejemplo

Transformamos el sistema lineal en la forma de función iterativa $\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k)$.

$$\begin{array}{rcl} 4x & -y & +z = 7 \\ 4x & -8y & +z = -21 \\ -2x & +y & +5z = 15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{7+y-z}{4} \\ y = \frac{21+4x+z}{8} \\ z = \frac{15+2x-y}{5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{k+1} = \frac{7+y_k-z_k}{4} \\ y_{k+1} = \frac{21+4x_k+z_k}{8} \\ z_{k+1} = \frac{15+2x_k-y_k}{5} \end{array}$$

La **solución exacta** del sistema es (2, 4, 3)

Si usamos el **punto inicial** $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ en función iterativo, recibimos una nueva aproximación de solución $P_1 = (1.75, 3.375, 3.00)$ cual esta mas cerca de solución exacta.

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{7+y_0-z_0}{4} = \frac{7+2-2}{4} = 1.75 \\ y_1 = \frac{21+4x_0+z_0}{8} \Rightarrow y_1 = \frac{21+4+2}{8} = 3.375 \\ z_1 = \frac{15+2x_0-y_0}{5} = \frac{15+2-2}{5} = 3.00 \end{array}$$

Método de Jacobi. Ejemplo

Como el resultado de la sustitución sucesiva de las aproximaciones calculadas en la función iterativa se **obtiene una secuencia de aproximaciones de soluciones tendiente a la solución exacta.**

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.99062500	3.97656250	3.00000000
5	1.99414063	3.99531250	3.00093750
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1.99999993	3.99999985	2.99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Método de Jacobi. Ejemplo de divergencia.

En algunos casos el método de Jacobi pierde la convergencia.

Con una aproximación inicial $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ el sistema

$$\begin{array}{rcl} -2x & + y & + 5z = 15 \\ 4x & -8y & + z = -21 \\ 4x & -y & + z = 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{k+1} = \frac{-15 + y_k + 5z_k}{2} \\ y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8} \\ z_{k+1} = 7 - 4x_k + y_k \end{array} \quad \text{se diverge.}$$

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	-1.5	3.375	5.0
2	6.6875	2.5	16.375
3	34.6875	8.015625	-17.25
4	-46.617188	17.8125	-123.73438
5	-307.929688	-36.150391	211.28125
6	502.62793	-124.929688	1202.56836
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Método de Jacobi. La condición de convergencia.

El método de Jacobi **siempre se converge si la matriz A es estrictamente diagonal dominante** y puede converger incluso si esta condición no se satisface.

Se dice que la matriz **A** de $N \times N$ es **estrictamente diagonal dominante** cuando se satisface:

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}|, \quad k=1, 2, \dots, N$$

Ejemplo 1
convergencia

$$\begin{array}{r} 4x \quad -y \quad +z \\ 4x \quad -8y \quad +z \\ -2x \quad +y \quad +5z \end{array}$$

diagonal dominante

$$\begin{array}{r} |4| > |-1| + |1| \\ |-8| > |4| + |1| \\ |5| > |-2| + |1| \end{array}$$

Ejemplo 2
divergencia

$$\begin{array}{r} -2x \quad +y \quad +5z \\ 4x \quad -8y \quad +z \\ 4x \quad -y \quad +z \end{array}$$

no

$$\begin{array}{r} |-2| < |1| + |5| \\ |-8| > |4| + |1| \\ |1| < |4| + |-1| \end{array}$$

Método de Gauss- Seidel

Una variación del método de Jacobi es el método de Gauss-Saidel, que es **mas eficiente** que el primero, la diferencia esta en que en el método de Jacobi para generar el nuevo punto del proceso iterativo se utilizan las coordenadas del punto anterior, mientras que en el de Gauss-Saidel se van usando las coordenadas en la medida en que se van calculadas.

Ejemplo

Jacobi

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_k + z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}$$

Gauss-Saidel

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

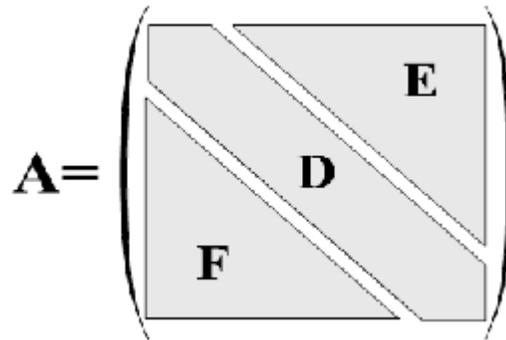
$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{8}$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5}$$

Método de Gauss- Seidel

Para construir iteración, igual como en caso de método Jacobi escribimos la matriz **A** como una suma de tres matrices.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}$$



La sistema lineal es $\mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{x} + \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{b}$

En esta expresión reemplazamos \mathbf{x} con \mathbf{x}_{k+1} en productos $\mathbf{D} \mathbf{x}$ y $\mathbf{F} \mathbf{x}$. Entonces tenemos $\mathbf{D} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{E} \mathbf{x}_k + \mathbf{F} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$.

Despejamos \mathbf{x}_{k+1} .

Recibimos esquema iterativa de Gauss- Seidel

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{F} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{E} \mathbf{x}_k) .$$

Método de Gauss- Seidel

Obtenemos **esquema iterativa de Gauss- Seidel en forma escalar.**

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \quad (2)$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \quad (3)$$

De la ecuación (1) se tiene que $x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)}}{a_{11}}$.

De la ecuación (2) se tiene que $x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)}}{a_{22}}$.

De la ecuación (3) se tiene que $x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)}}{a_{33}}$.

O para cualquier x_i

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i=1, \dots, n$$

Como en método de Jacobi $a_{ii} \neq 0$.

El método de Gauss-Seidel como el de Jacobi se converge a la solución si **la matriz** de coeficientes del sistema es **estrictamente diagonal dominante.**

Convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Solución exacta es (2, 4, 3)

k	x_k	y_k	z_k	Jacobi
0	1.0	2.0	2.0	
1	1.75	3.375	3.0	
2	1.84375	3.875	3.025	
3	1.9625	3.925	2.9625	

k	x_k	y_k	z_k	Gauss-Seidel
0	1.0	2.0	2.0	
1	1.75	3.75	2.95	
2	1.95	3.96875	2.98625	
3	1.995625	3.99609375	2.99903125	

Aunque el método de **Gauss-Seidel se converge más rápido**, el **método de Jacobi es más estable**. A veces, el método de Jacobi converge en el caso de los sistemas en que el método de Gauss-Seidel da una divergencia.

Preguntas de autoevaluación

1. Dos clases de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos iterativos. Idea general. Tres cosas necesarias para construir un método iterativo.
2. Distancia en espacios 1D, 2D y 3D
3. Propiedades de normas
4. Las normas mas usuales. Equivalencia de las normas.
5. Convergencia de sucesión. Cuando sucesión converge?
6. Convergencia lineal.
7. Convergencia super lineal
8. Convergencia de orden de p
9. Error absoluto, error relativo y cifras significativas

Preguntas de autoevaluación

10. Mapeo contractivo
11. Punto fijo. Propiedad de punto fijo
12. Ejemplos de convergencia
13. Iteración de punto fijo
14. Error de convergencia. Criterios de terminación (de iteraciones)
15. Método de Jacobi
16. Método de Gauss- Seidel
17. La condición de convergencia de método Jacobi y Gauss- Seidel.

Practica 2.

Desarrollar las programas

1. Solución del sistema lineal con método de Jacobi
2. Solución del sistema lineal con método de Gauss-Seidel

Librería de Scilab para solución los sistemas lineales con los métodos iterativos

(En el capítulo “Sparse Matrix”???)

norm — matrix norms

gmres — Generalized Minimum RESidual method

pcg — preconditioned conjugate gradient

qmr — quasi minimal residual method with preconditioning