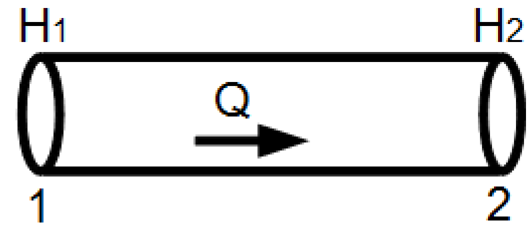
Tema 3. Solución de Ecuaciones no lineales $f(x)=0$

3.1. Método de bisección (de Bolzano).
3.2. Método de Falsa Posición (Regula Falsi).
3.3. Método de Newton.
3.4. Método secante.
3.5. Convergencia de los métodos
3.6. Solución de sistemas de ecuaciones no lineales

Ecuaciones no lineales *f*(*x*)=0

Ejemplo del problema.



Hay un tubo con el agua. Si el agua fluye desde el extremo del tubo 1 al extremo 2, la presión en el extremo 1 es mayor que la presión en el extremo 2 $(H_1 > H_2)$.

Hay dos tipos de pérdidas de presión en la tubería: pérdidas por la fricción del agua y las pérdidas menores debidos a la heterogeneidad de la tubería (diafragmas, codos, etc).

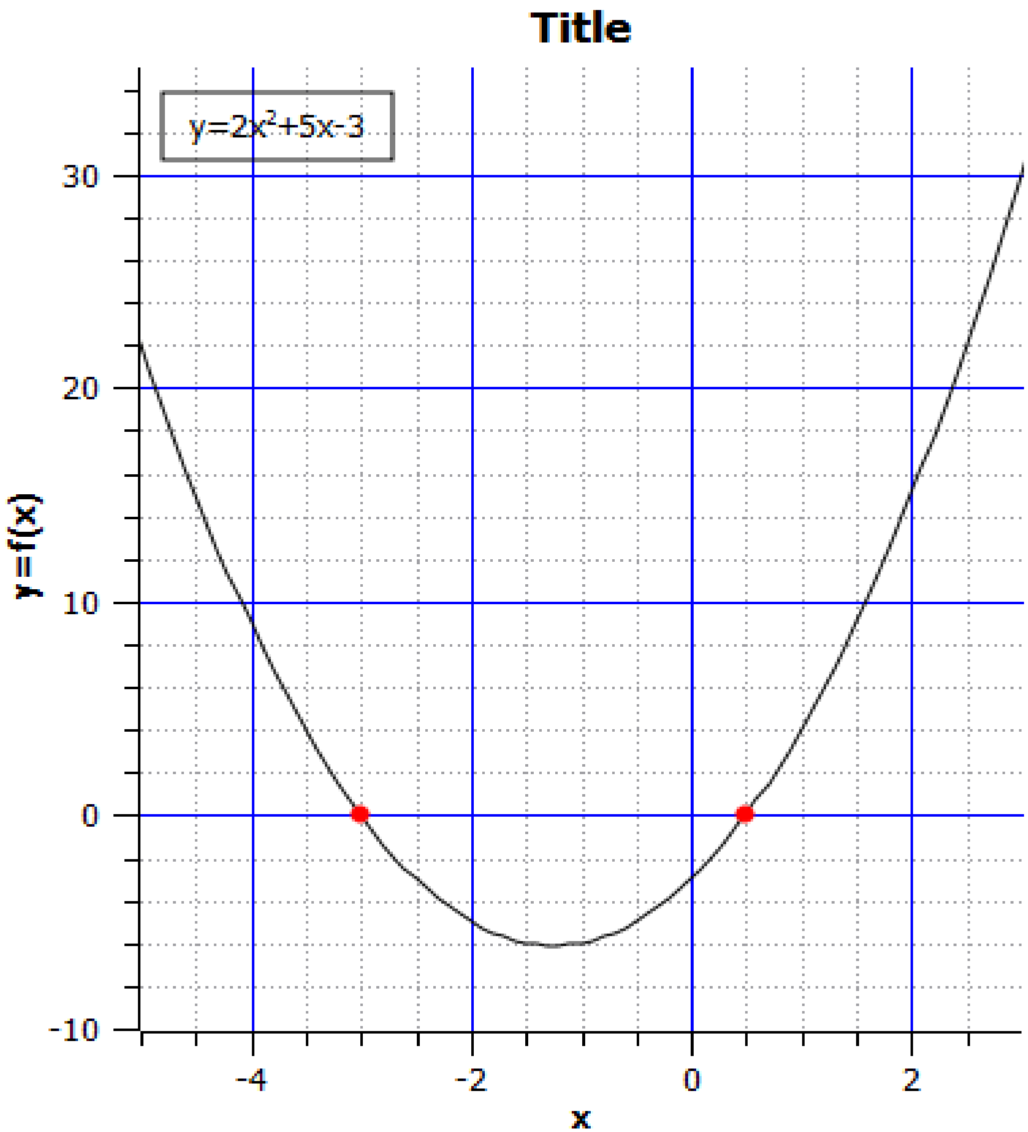
En general, la relación entre pérdidas y el flujo se puede escribir como

$H_1 - H_2 = RQ^{1.85} + mQ^2$ o $H_1 - H_2 - RQ^{1.85} - mQ^2 = 0$

Conocemos los valores del coeficiente de pérdidas por fricción R, el coeficiente de pérdidas menores m y los valores de las presiones en los extremos de las tuberías H_1 y H_2. Queremos encontrar un flujo en la tubería de Q. **Esta problema no tiene solución analítica**.

Estimación inicial. El flujo en la tubería será mayor que $Q = \left(\frac{H_1 - H_2}{R+m}\right)^{1/2}$ y menor de $Q = \left(\frac{H_1 - H_2}{R+m}\right)^{1/1.85}$.

Solución de ecuaciones no lineales *f*(*x*)=0



Suponga que $f(x)$ es una función **continua**. Valor r por el que $f(r)=0$ se llama **raíz de la ecuación** $f(x)=0$. Además, decimos que r es un **cero de la función** $f(x)$.

Para encontrar los ceros de la función se usan los **métodos iterativos**, esto es, métodos que partiendo de un punto inicial, generan una sucesión de puntos que deben converger al cero de la función.

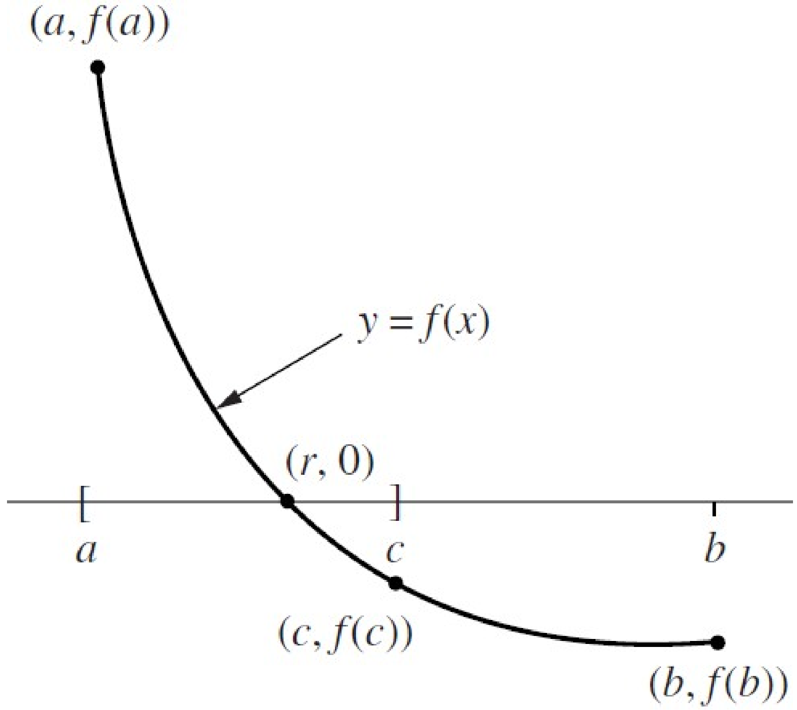
Una buena idea es **visualizar** las funciones, los ceros de la que estamos buscando.

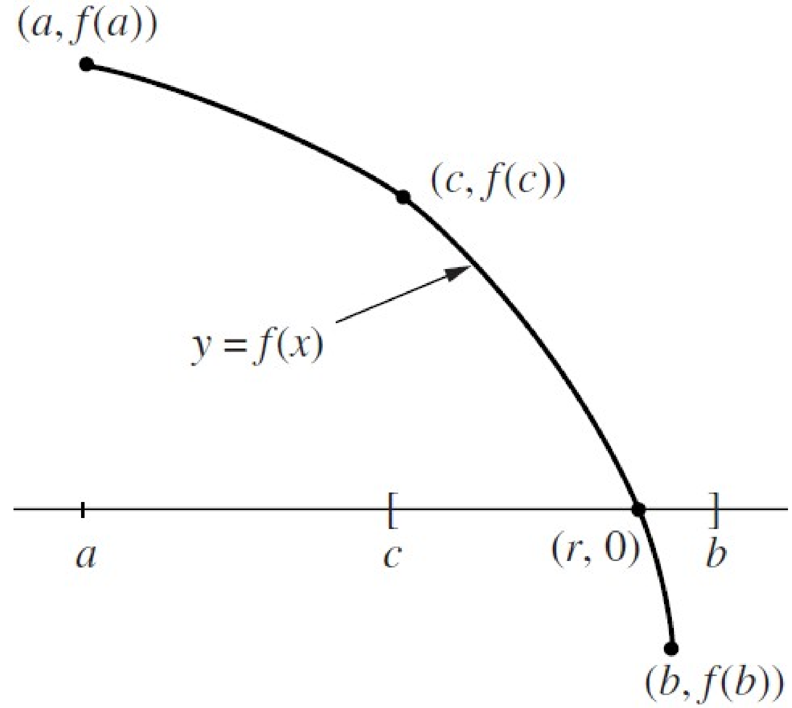
Por ejemplo la función $y=2x^2+5x-3$ tiene dos ceros en puntos $x=-3$ y $x=0.5$

Si la función tiene una raíz en r **, los valores de función a izquierda y a derecha de este punto debe tener signos opuestos.**

Método de bisección (de Bolzano)

Si $f(x) \in C[a_0, b_0]$ con $f(a_0)\, f(b_0) < 0$, entonces existe $r \in [a_0, b_0]$, tal que, $f(r) = 0$ (*f(x)* corta al eje *OX* en el punto (*r*, 0)).





Dividimos el intervalo $[a_0, b_0]$ en dos iguales con un punto $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Entonces puede suceder tres casos:

1. $f(c_0) = 0$ entonces $r = c_0$
2. $f(a_0) f(c_0) < 0$ la raíz está en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$,
3. $f(c_0) f(b_0) < 0$ la raíz está en el intervalo $[a_1, b_1]$ donde $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$

Método de bisección (de Bolzano)

Nuevo intervalo $[a_1, b_1]$ es doble menos que intervalo $[a_0, b_0]$

Sea ahora $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ....

Continuando con este proceso se toma $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ generando una sucesión de intervalos $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_k, b_k]$, donde cada nuevo intervalo

$$[a_k, b_k] = \frac{1}{2}[a_{k-1}, b_{k-1}] .$$

Criterio de parada. El proceso se termina cuando longitud de intervalo va menor que la tolerancia requerida $[b_k - a_k] \leqslant tol$.

Método de Falsa Posición (Regula Falsi)

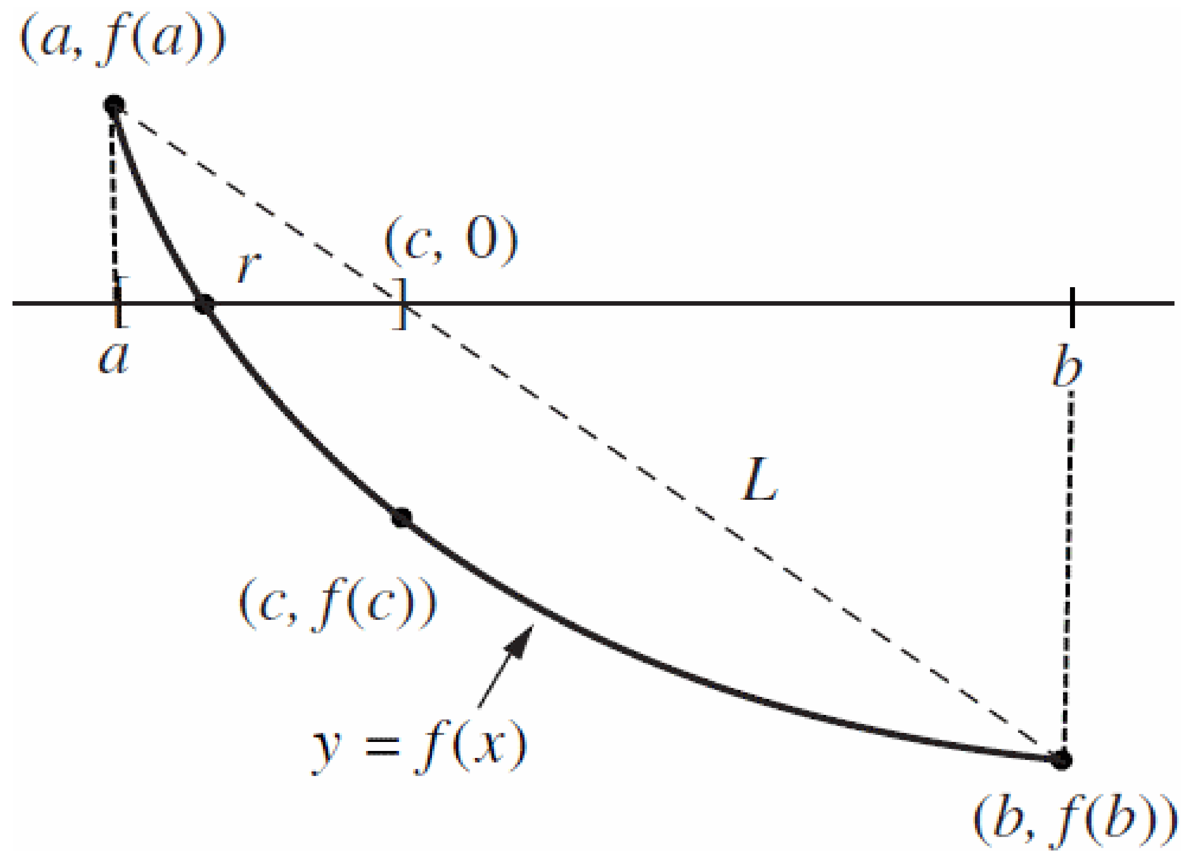
Una mejor aproximación se obtiene si encontramos el punto (c, 0) donde la línea secante L que une los puntos (a, $f(a)$) y (b, $f(b)$) cruza el eje OX.

La pendiente de la recta que une los puntos (a, $f(a)$) y (b, $f(b)$) es $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

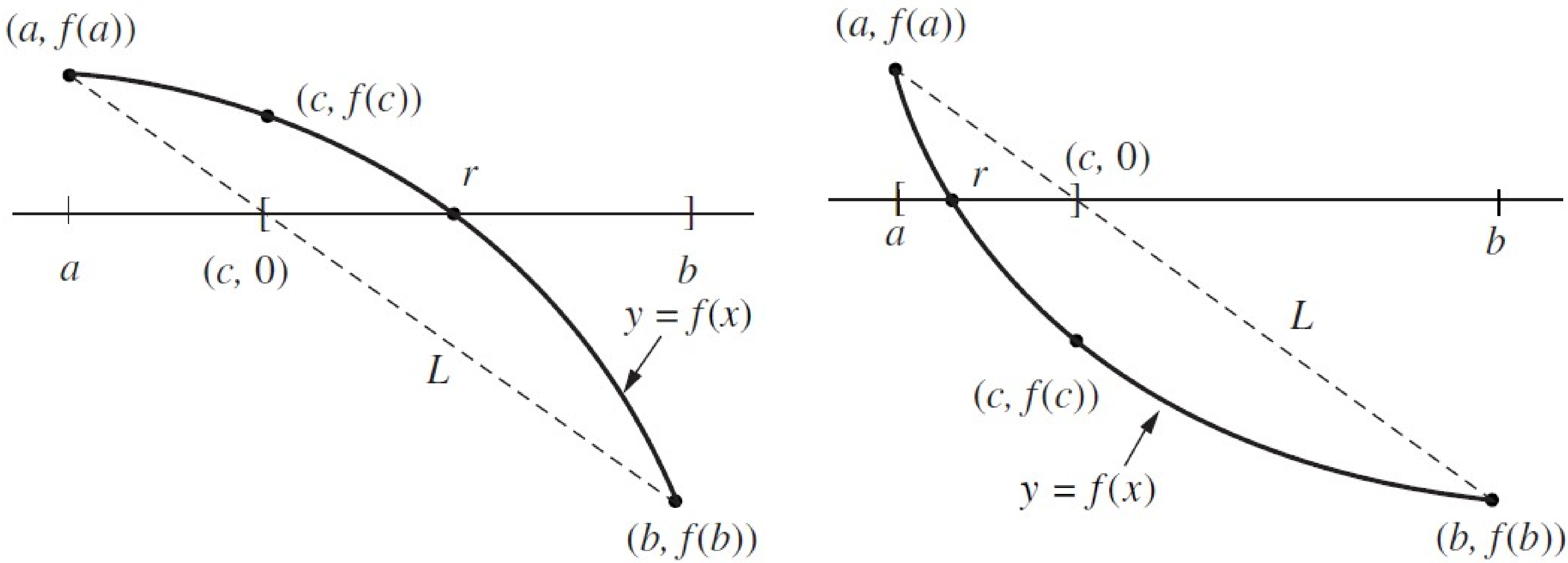
Si usamos puntos (c, $f(c)$) y (b, $f(b)$), la pendiente es $m=\frac{f(b)-0}{b-c}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-0}{b-c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$



Método de Falsa Posición (Regula Falsi)



Al igual que para el método de bisección se tienen tres posibilidades:

1. $f(c) = 0$ entonces c es un cero de $f(x)$
2. $f(a)\,f(c) < 0$ entonces hay un cero de $f(x)$ en $[a, c]$.
3. $f(c)\,f(b) < 0$ entonces hay un cero de $f(x)$ en $[c, b]$.

Lo anterior sugiere un proceso iterativo que se concreta tomando

$$c_k = b_k - \frac{f(b_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

Método de Falsa Posición (Regula Falsi)

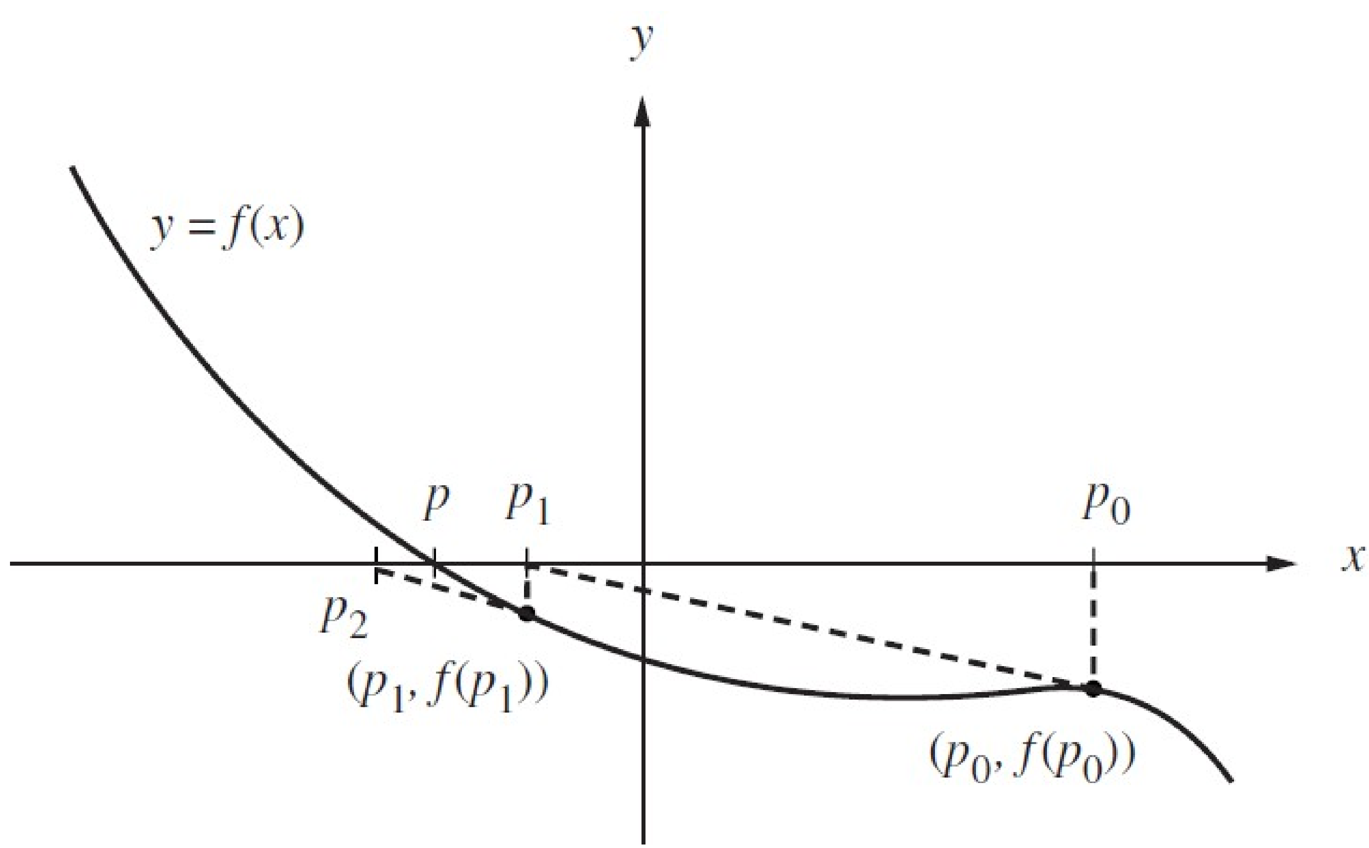
El criterio de terminación utilizado en el método de bisección no es útil para el método de falsa posición y puede resultar en un bucle infinito.

La proximidad de las iteraciones consecutivas $|x_{k+1}-x_k|<tol$ y el valor de $|f(c_n)|<tol$ ambos se utilizan como el criterio de terminación.

Método de Newton

En la búsqueda de los ceros de una función uno de los **método mas atractivos** debido a su **rápida convergencia**, ya que en general es cuadrática, es el de **Newton**.

Una ecuación que relaciona p_1 y p_0 (función iterativo) se puede encontrar si anotamos dos versiones para la pendiente de la recta tangente:



$m = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0}$ que es la pendiente de la recta que pasa por $(p_1, 0)$ y $(p_0, f(p_0))$, y

$m = f'(p_0)$ que es la pendiente en el punto $(p_0, f(p_0))$

$$f'(p_0) = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0} \Rightarrow$$

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Método de Newton

Sea $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, una función $n+1$ **veces diferenciable** en intervalo $[a,b]$ y sea $x_0 \in [a,b]$.

Entonces la función f en el punto $x \in [a,b]$ cerca de x_0 puede ser escrita como **serie infinito de Taylor**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots$$

Utilizamos **solamente los términos lineales**. Esto se conoce como una **aproximación lineal**.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Buscamos cero de función $f(x) = 0$, entonces

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{o} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Dado que $f(x) = 0$, es fácil ver que $g(p) = p$ (**punto fijo**).

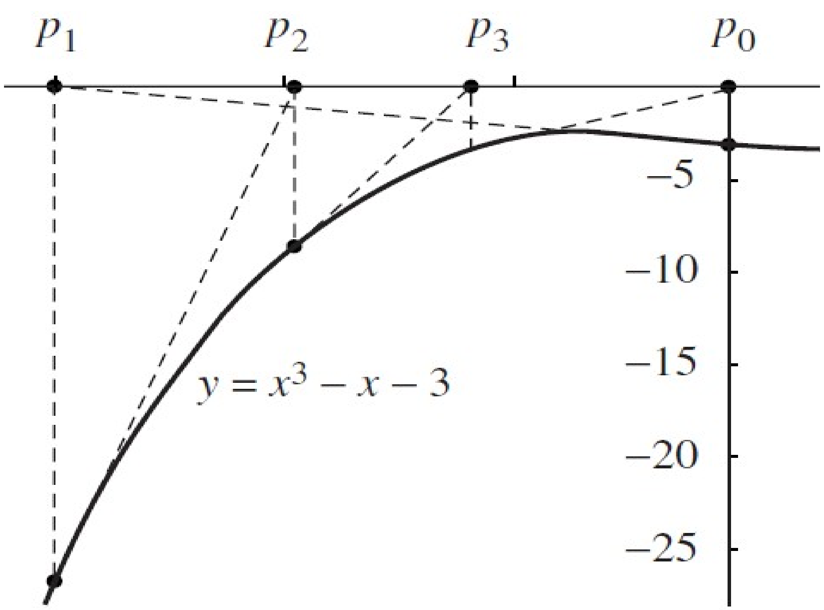
La iteración de Newton-Raphson para encontrar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ se logra encontrar un punto fijo de la función $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Método de Newton. Debilidades

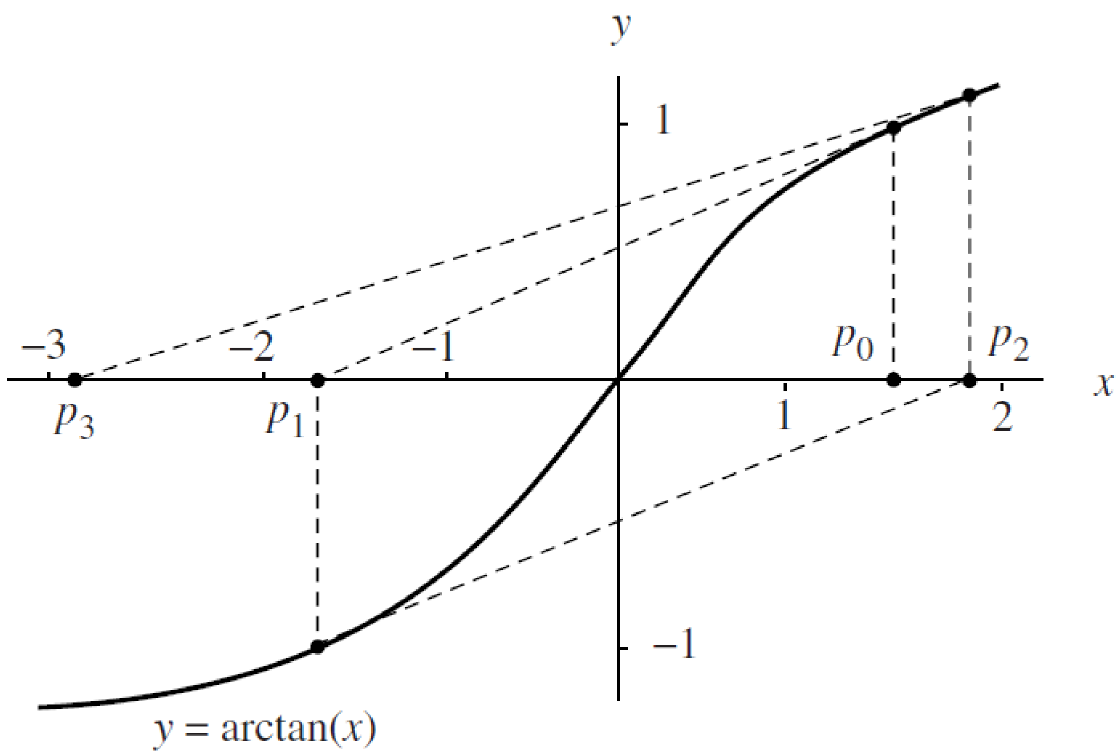
División por cero

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ Cuando derivada $f'(x_k)=0$

Ciclismo



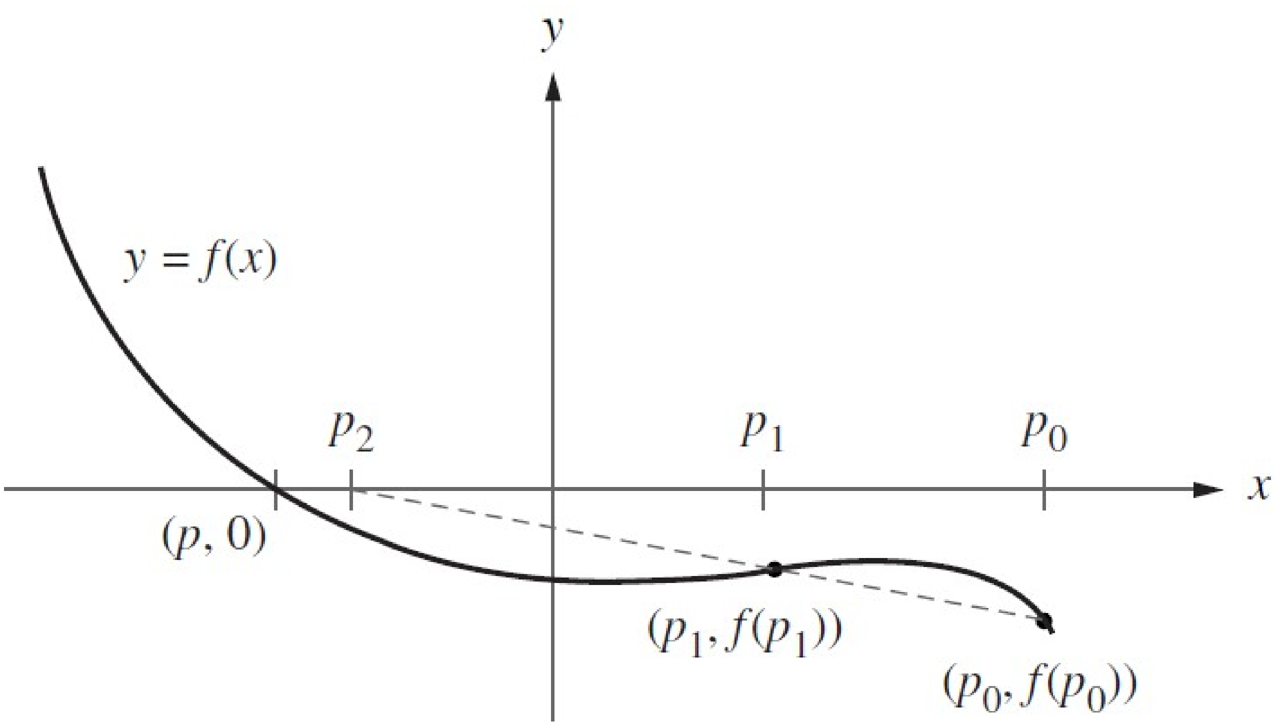
Oscilación



Método de la Secante

El método de la secante es casi tan rápido como el de Newton, pero **no requiere calculo de derivada** $f'(x)$. Este método **requiere dos aproximaciones iniciales** p_0 y p_1. Así como en el método de Falsa Posición para encontrar el punto de la siguiente aproximación utilizamos dos versiones de pendiente de la secante.

$$m=\frac{f(p_1)-f(p_0)}{p_1-p_0} \quad \text{y} \quad m=\frac{0-f(p_1)}{p_2-p_1} \;\Rightarrow\; \frac{0-f(p_1)}{p_2-p_1}=\frac{f(p_1)-f(p_0)}{p_1-p_0} \;\Rightarrow$$



$$p_2=p_1-\frac{f(p_1)(p_1-p_0)}{f(p_1)-f(p_0)} \;\Rightarrow$$

$$p_{k+1}=p_k-\frac{f(p_k)(p_k-p_{k-1})}{f(p_k)-f(p_{k-1})}$$

Tazas de convergencia de los métodos

Método	Consideraciones especiales	Relación entre los errores de los términos sucesivos
Bisección		$E_{k+1} \approx \frac{1}{2} E_k$
Regula falsi		$E_{k+1} \approx a\, E_k$
Secante	Múltiples raíces	$E_{k+1} \approx a\, E_k$
Newton-Raphson	Múltiples raíces	$E_{k+1} \approx a\, E_k$
Secante	Simple raíz	$E_{k+1} \approx a\, E_k^{1.618}$
Newton-Raphson	Simple raíz	$E_{k+1} \approx a\, E_k^{2}$
Newton-Raphson acelerado	Múltiples raíces	$E_{k+1} \approx a\, E_k^{2}$

* A es un coeficiente de convergencia

Suponga que $f(x)$ y sus derivados $f'(x), \ldots, f^{(M)}(x)$ son **definidas** y **continuas** en un intervalo de cerca de $x = p$. Decimos que $f(x) = 0$ **tiene un raíz de orden** M en $x = p$ si y sólo si

$f(p)=0$, $f'(p)=0$, . . . , $f^{(M-1)}(p)=0$, y $f^{(M)}(p)\neq 0$.

Ejemplo $f(x)=x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$. **Que raises tiene?**

Sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Newton

Caso 1D. Los términos lineales de serie de Taylor

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Buscamos cero de función $f(x) = 0$, entonces

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad => \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{o} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Caso multidimensional.

Vector Función vectorial

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{1,} \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \cdots \\ F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

Cerca de **x**, cada una de las funciones F_i puede ser desarrollada en serie de Taylor (mostramos solo términos lineales) $F_i(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) \approx F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j$ (1)

o en forma vectorial es $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \delta\,\mathbf{x}$

Sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Newton

Los elementos de **matriz Jacobiana *J*** son $J_{ij} \equiv \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

Por ejemplo para caso 2D, cuando $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, los términos lineales de series de Taylor de funciones son

$$F_1(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) \approx F_1(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\delta x_2 \quad \text{y}$$

$$F_2(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) \approx F_2(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\delta x_2 \ .$$

la matriz Jacobiana es $\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$

Buscamos cero de función $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) = 0$, entonces $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) \cdot \delta\,\mathbf{x}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$

Este sistema lineal puede ser solucionada con factorización LU para obtener correcciones $\delta\mathbf{x}_\mathbf{k}$.

Nuevo aproximación es $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta\,\mathbf{x}_k$

Sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Newton

Dado $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable y aproximación inicial $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$

ALGORITMO

Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ hasta converger $\left\| \boldsymbol{F}\left(\mathbf{x}_k\right) \right\| \leq tol$

1. Evaluar la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$
2. Evaluar el Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$
3. Resuelva el sistema lineal $\mathbf{J}\left(\mathbf{x}_k\right) \cdot \delta\mathbf{x}_k = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_k\right)$ para $\delta\mathbf{x}_k$.
4. Calcule el siguiente punto: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k$

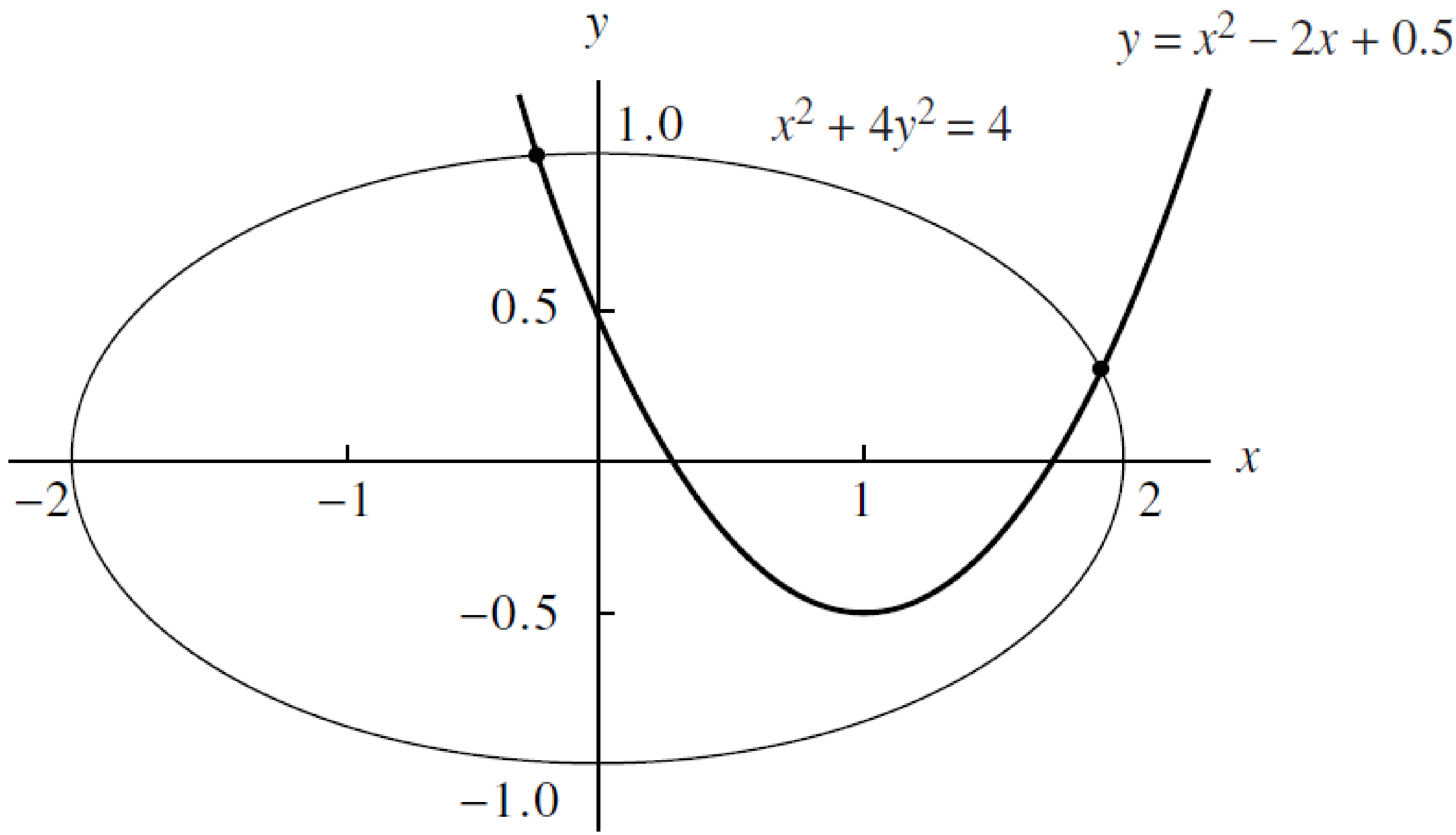
Ejemplo. Con el método de Newton encontrar las raíces del sistema ecuaciones no lineales

$$0 = x^2 - 2\mathrm{x} - y + 0.5$$

$$0 = x^2 + 4\mathrm{y}^2 - 4$$

con la aproximación inicial (2.00, 0.25). Comparar los resultados con los resultados presentados en la tabla de la página siguiente.

Sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Newton. Ejemplo.



Hay dos puntos de solución y que se encuentran en la vecindad de (-0.2, 1.0) y (1.9, 0.3).

Sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Newton. Ejemplo.

$$\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} x^2-2x-y+0.5 \\ x^2+4y^2-4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 2x-2 & -1 \\ 2x & 8y \end{bmatrix}$$

P_k	Solution of the linear system $J(P_k)\Delta P=-F(P_k)$	$P_k+\Delta P$
$\begin{bmatrix} 2.00 \\ 0.25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.0 & -1.0 \\ 4.0 & 2.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.09375 \\ 0.0625 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.90625 \\ 0.3125 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1.90625 \\ 0.3125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.8125 & -1.0 \\ 3.8125 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.005559 \\ -0.001287 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0.008789 \\ 0.024414 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.900691 \\ 0.311213 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1.900691 \\ 0.311213 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.801381 & -1.000000 \\ 3.801381 & 2.489700 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.000014 \\ 0.000006 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 0.000031 \\ 0.000038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.900677 \\ 0.311219 \end{bmatrix}$

Preguntas de autoevaluación.

Que es ecuación no lineales. Que significa resolver ecuación no lineal?

Método de bisección de Bolzano. Criterio de parada

Método de Falsa Posición o (Regula Falsi). Criterio de parada

Método de Newton. Idea. Serie de Taylor. Linealizacion.

Método de Newton. Debilidades.

Método de la Secante.

Tazas de convergencia de los métodos

Solución de sistemas de ecuaciones no lineales con el método de Newton multidimensional.