Tema 4. Interpolación.

4.1. Aproximación.
4.2. Interpolación y extrapolación. Definición de problema.
4.3. Interpolación polinómica. Método de coeficientes indeterminados.
4.4. Polinomio en forma de Lagrange.
4.5. Polinomio en forma de Newton. Interpolación lineal y cuadrática. Diferencias divididas.
4.6. Interpolación a trozos. Ventaja.
4.7. Splines cúbicos.
4.8. Ajuste de curvas. La recta de mínimos cuadrados.
Anexo 1. Calculo de diferencias divididas

Aproximación

Aproximación es una representación inexacta de algo que, sin embargo, es suficientemente fiel como para ser útil.

Una **aproximación** usualmente se realiza cuando una **forma exacta** o un valor numérico exacto es **desconocido** o **difícil de obtener**. Sin embargo, puede conocerse **alguna forma**, que **sea capaz** de **representar** a la forma real, de manera que **no se presenten desviaciones significativas**.

En la práctica, serie de Taylor es mas usada para aproximación de funciones

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

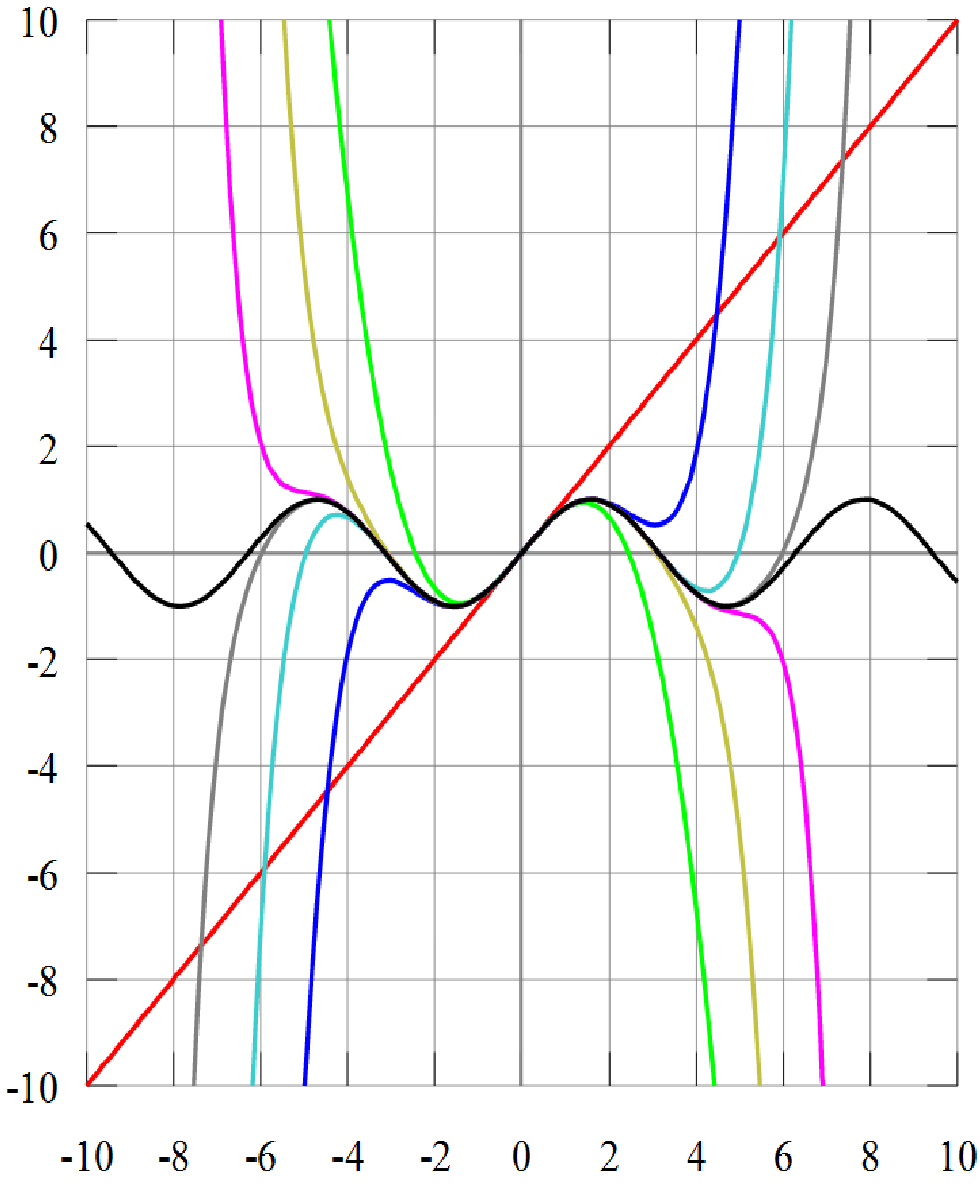
Series de Taylor de funciones

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Aproximación



Función sin(x) y aproximaciones con serie de Taylor centradas en 0, con polinomios de grado 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

Interpolación y extrapolación.

Se tienen **los valores de una función** $y=f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. A menudo, **no se conoce la expresión de la función** y solo están disponibles los valores que toma en dichos puntos.

El objetivo de interpolación es calcular valores de $y=f(x)$ en otros puntos, **entre los puntos donde los valores de función son conocidos.**

Por ejemplo tenemos una tabla con los valores medidos.

X	1	2	2.5	3	4
Y	2	0	**?**	4	2

Queremos saber el valor de función en punto $x=2.5$

Si el problema es calcular el valor de función por ejemplo en punto $x=5$ esto se llama **extrapolación**.

Aplicaciones.

- Calcular rápidamente los valores de funciones complicadas, usando las tablas de sus valores y la interpolación.
- Aproximar curvas complicadas.
- Para la integración numérica y la solución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Aproximar procesos complicados, hacer predicciones.

Interpolación polinómica

Un polinomio es $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ (1)

Usamos **polinomios** porque **son más fáciles para evaluar, diferenciar e integrar**.

Tenemos una tabla con los valores conocidos.

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Queremos obtener formula $y = f(x)$ para tener posibilidad calcular los valores de $f(x)$ entre de los puntos de tabla.

Para esto, **se construye** un polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual a *n*, **cuyos valores en puntos** $x_k, (0 \leqslant k \leqslant n)$ **coinciden con los valores de** $P(x_k) = f(x_k) = y_k$. Es decir

$$P(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0$$

$$P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1$$

...

$$P(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n$$

Interpolación polinómica. Método de coeficientes indeterminados.

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Recuerde que todos x_k y y_k son conocidos. Desconocidos son los coeficientes de polinomio a_k . **Entonces (2) es un sistema de ecuaciones lineales** cual podemos resolver por ejemplo con factorización LU. Cuando encontramos el vector de los coeficientes de polinomio $\boldsymbol{a}=(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ podemos construir el polinomio interpolánte

$$P(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_{n-1} x^{n-1}+a_n x^n$$

Este método de interpolación se llaman como **coeficientes indeterminados.**

Bajo ciertas condiciones $P(x)$ **aproximara la función** $y=f(x)$ **también en otros puntos**.

Coeficientes indeterminados. Ejemplo

Ejemplo. Construyamos un polinomio $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ que pasa por los puntos $P(-2)=9$, $P(3)=4$, $P(4)=15$. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes a_0, a_1, a_2 del polinomio:

$$\begin{aligned} a_0 \quad -2a_1 \quad +4a_2 &= 9 \\ a_0 \quad +3a_1 \quad +9a_2 &= 4 \\ a_0 \quad +4a_1 \quad +16a_2 &= 15 \end{aligned}$$

Escribamos el sistema en forma matricial y resolvamos usando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Respuesta: $P_2(x)=2x^2-3x-5$

Existencia y unicidad del polinomio interpolánte.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_n$ algunos números diferentes por pares. Entonces **existe un único polinomio** P de grado $r \leq n$ tal que $P_r(x_j)=y_j$ para todos $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Polinomio en forma de Lagrange

Tenemos un conjunto de $n+1$ puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$

X	Y
x_0	y_0
x_1	y_1
...	...
x_j	y_j
...	...
x_n	y_n

donde todos los x_j se asumen distintos.

El polinomio interpolador en la forma de Lagrange es la combinación lineal

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \ldots + y_j l_j(x) + \ldots + y_n l_n(x) \qquad (3)$$

donde $l_j(x)$ es la base del polinómio de Lagrange

Para obtener la forma de $l_j(x)$ **, estimamos el polinomio en los puntos de la tabla**.

Recuerde que **en puntos** x_j **el valor de polinomio interpolador es igual al** y_j . Tenemos

Polinomio en forma de Lagrange

$$L(x_0) = y_0 l_0(x_0) + y_1 \cancel{l_1(x_0)} + \ldots + y_j \cancel{l_j(x_0)} + \ldots + y_n \cancel{l_n(x_0)} = y_0$$

$$L(x_1) = y_0 \cancel{l_0(x_1)} + y_1 l_1(x_1) + \ldots + y_j \cancel{l_j(x_1)} + \ldots + y_n \cancel{l_n(x_1)} = y_1$$

$$\ldots$$

$$L(x_j) = y_0 \cancel{l_0(x_j)} + y_1 \cancel{l_1(x_j)} + \ldots + y_j l_j(x_j) + \ldots + y_n \cancel{l_n(x_j)} = y_j$$

$$\ldots$$

$$L(x_n) = y_0 \cancel{l_0(x_n)} + y_1 \cancel{l_1(x_n)} + \ldots + y_j \cancel{l_j(x_n)} + \ldots + y_n l_n(x_n) = y_n$$

Todavía no conocemos la forma de $l_j(x)$, pero podemos suponer que los valores de $l_j(x)$ en los puntos de tabla serán los siguientes:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, j \neq i \\ 1, j = i \end{cases} . \qquad (4)$$

Entonces cada de funciones $l_j(x)$ debe tener por lo menos n ceros en los puntos $x_i, i \neq j$. Es razonable definir $l_j(x)$ como un polinomio de grado n

$$l_j(x) = C_j (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n) \qquad (5)$$

En el punto x_j $l_j(x_j) = 1$. Por lo tanto, la ecu. (5) no contiene un factor $(x - x_j)$.

Polinomio en forma de Lagrange

El coeficiente C_j en la ecu. (5) es necesario para obtener exactamente uno en el punto x_j .

Condición $l_j(x_j)=C_j(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)=1$

nos da valor de $C_j=\dfrac{1}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$ (6)

Sustituimos ecu. (6) en ecu. (5). Tenemos

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

El polinomio de Lagrange en forma corta se puede escribir de la siguiente manera:

$$\boxed{L(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}}$$

Desventajas.

Para construir el polinomio de Lagrange de orden *n* no podemos usar el polinomio de orden *n-1*, lo cual implica un alto costo computacional.

Polinomio en forma de Lagrange. Ejemplo.

Crear un polinomio interpolador en forma de Lagrange para un función que toma los siguientes valores en los cuatros puntos.

x_i	$y_i=f(x_i)$
-9	5
-4	2
-1	-2
7	9

Esto significa que queremos construir un polinomio

$L(x)=\sum_{j=0}^{3} y_j l_j(x)$ de orden 3 (cúbico) con base

$$l_j(x)=\prod_{i=0, i\neq j}^{3} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$$

Resuelve en pizarrón y compara resultados con próxima pagina.

Polinomio en forma de Lagrange. Ejemplo.

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_1-x_3}$$

$$l_2(x)=\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\frac{x-x_3}{x_2-x_3}$$

$$l_3(x)=\frac{x-x_0}{x_3-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

$$L(x)=\sum_{j=0}^{3} y_j l_j(x)$$

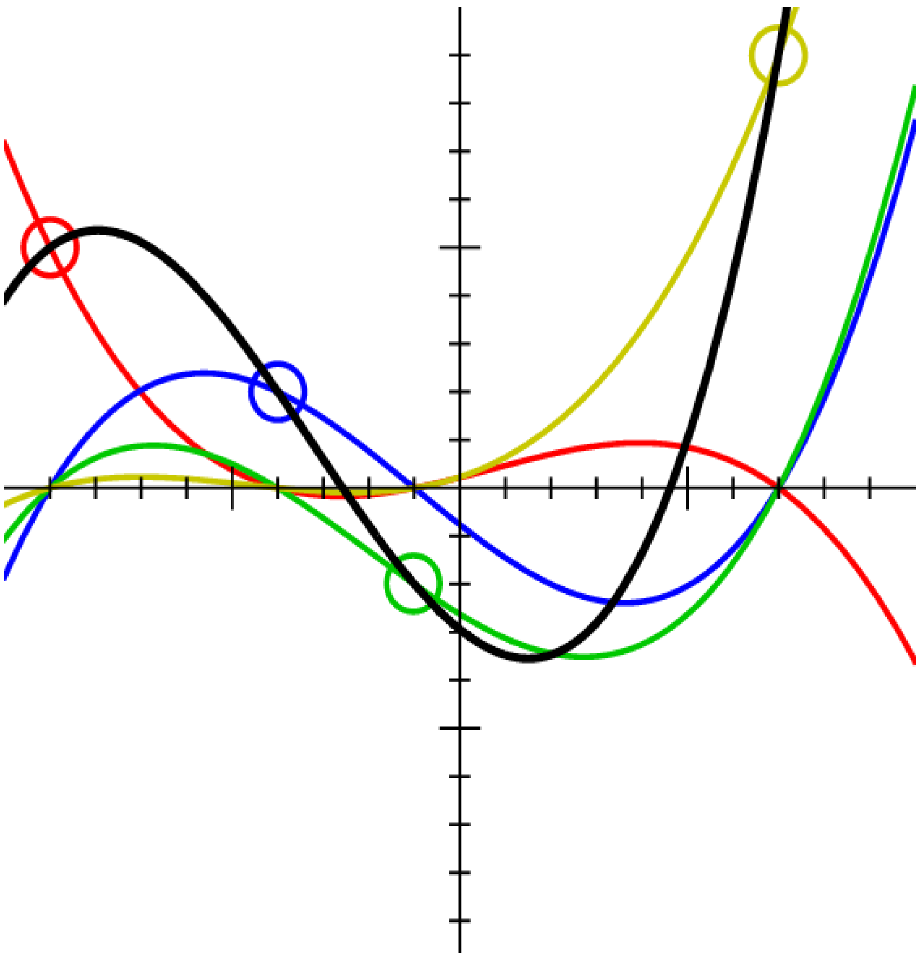
$$L(x)=y_0 l_0(x)+y_1 l_1(x)+y_2 l_2(x)+y_3 l_3(x)$$

Encuentra el valor de polinomio en punto $x=2$ con Scilab (Tema04.sup1.sce)

Polinomio en forma de Lagrange. Ejemplo.

La interpolación polinómica (cúbica) $L(x)$ de cuatro puntos ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)).

$L(x)$ que es la suma de la bases polinómicas *escaladas* $y_0 l_0(x)$, $y_1 l_1(x)$, $y_2 l_2(x)$ y $y_3 l_3(x)$. La interpolación polinómica pasa exactamente por los cuatro puntos (llamados puntos de control) y cada base polinómica *escalada* pasa por su respectivo punto de control y se anula cuando x corresponde a los otros puntos de control.



$$L(2) = -3.46875$$

Interpolación con el polinomio de Newton. Caso lineal

Tenemos dos puntos $\{x_0, y_0\}$ y $\{x_1, y_1\}$, donde $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ y $y = f(x)$ es función que queremos interpolar.

Buscamos el polinomio interpolador de grado 1 en el forma

$$\boxed{P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)} \qquad (7)$$

Buscamos los coeficientes a_0 y a_1.

En el punto x_0 el valor de polinomio es igual a valor de función en este punto.

$P_1(x_0) = a_0 + a_1(\cancel{x_0 - x_0}) = y_0$. Entonces

$$\boxed{a_0 = y_0} \qquad (8)$$

En el punto x_1 el valor de polinomio es igual a valor de función en este punto.

$P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$. Con (8) tenemos

$f(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$

Por esto

$$\boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \qquad (9)$$

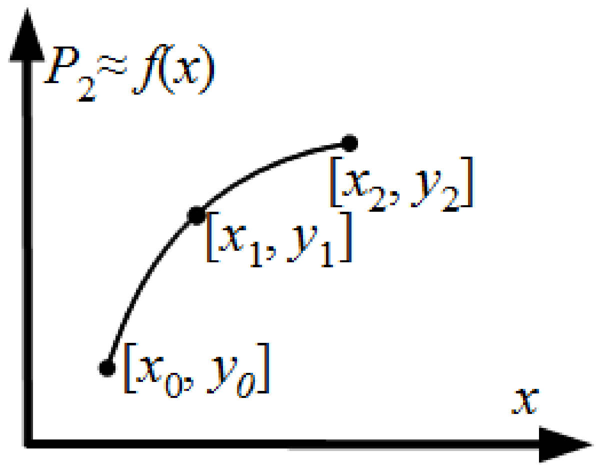
Al fin ecuaciones (7), (8) y (9) nos permitan construir el polinomio interpolador de Newton de grado 1. $\boxed{P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$.

Interpolación con el polinomio de Newton de grado 2.

Tenemos tres puntos $\{x_0, y_0\}$, $\{x_1, y_1\}$ y $\{x_2, y_3\}$, donde $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ y $y = f(x)$ es función que queremos interpolar.

Buscamos el polinomio interpolador de grado 2 en el forma

$$\boxed{P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)} \qquad (10)$$



Buscamos los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 .

En el punto x_0 el valor de polinomio es igual a y_0

$P_2(x_0) = a_0 + a_1\cancel{(x_0 - x_0)} + a_2\cancel{(x_0 - x_0)}(x_0 - x_1) = y_0$. Entonces

$$\boxed{a_0 = y_0} \qquad (11)$$

En el punto x_1 el valor de polinomio es igual a y_1 .

$P_2(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)\cancel{(x_1 - x_1)} = y_1$. Con (11) tenemos

$y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$

Interpolación con el polinomio de Newton de grado 2.

Por esto

$$\boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \qquad (12)$$

En el punto x_2 el valor de polinomio es igual a y_2

$$P_2(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$$

O con ecu. (11)

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_0 - a_1(x_2 - x_0)$$

Sumamos y restamos y_1

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - a_1(x_2 - x_0)$$

De ecu. (12) sigue que $y_1 - y_0 = a_1(x_1 - x_0)$. Entonces

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 + a_1(x_1 - x_0) - a_1(x_2 - x_0)$$

Agrupamos los términos

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 + a_1(x_1 - x_0 - x_2 + x_0)$$

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 - a_1(x_2 - x_1)$$

Dividimos entre $x_2 - x_1$

$$a_2(x_2 - x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - a_1$$

Con ecu. (12) tenemos

Interpolación con el polinomio de Newton de grado 2.

$$a_2(x_2-x_0)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Al fin tenemos

$$\boxed{a_2=\frac{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}} \qquad (13)$$

Al fin ecuaciones (10), (11), (12) y (13) nos permitan construir el polinomio interpolador de Newton de grado 2.

Los coeficientes del polinomio de Newton se llaman las diferencias divididas

$$a_0=f[x_0]=f(x_0)$$

$$a_1=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$a_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

Polinomio de Newton. Caso general

Es el análogo de la fórmula de Taylor en forma los diferencias divididas.

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\ldots$$

Ventaja. Tiene relación entre $P_{N-1}(x)$ y $P_N(x)$.

$$P_N(x)=P_{N-1}(x)+a_N(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{N-1}) \; .$$

Diferencias divididas

Las diferencias divididas para una función $f(x)$ se define como

$$f[x_k]=f(x_k)$$

$$f[x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_k]-f[x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_{k-1},x_k]-f[x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]-f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-3}}$$

Polinomio interpolador de Newton

o en general

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, x_{k-j+2}, \ldots, x_k] - f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

Si $x_0, \ldots, x_N$ son $N+1$ puntos distintos, existe un solo polinomio $P_N(x)$ de grado no más de N con la propiedad de que

$P_N(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, 1, \ldots, N$.

La forma de Newton de este polinomio es

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_N(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1})$$

donde las coeficientes

$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, N$ **son diferencias divididas.**

o en la forma mas corta $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$

Ejemplo. Calcular el polinomio interpolador P tal que $deg(P) = 2$, calcular $P(-1)$ y $P(0)$, $P(-2) = 11$, $P(1) = -4$, $P(2) = -5$.

Polinomio interpolador de Newton. Ejemplo.

Calcular el polinómio interpolador P tal que $deg(P)=2$, calcular $P(-1)$ y $P(0)$

$P(-2)=11$, $P(1)=-4$, $P(2)=-5$.

$$a_0=f[x_0]=f(x_0)=11$$

$$a_1=f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{-4-11}{1+2}=-5$$

$$a_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)=\frac{1}{2+2}\left(\frac{-5+4}{2-1}+5\right)=1$$

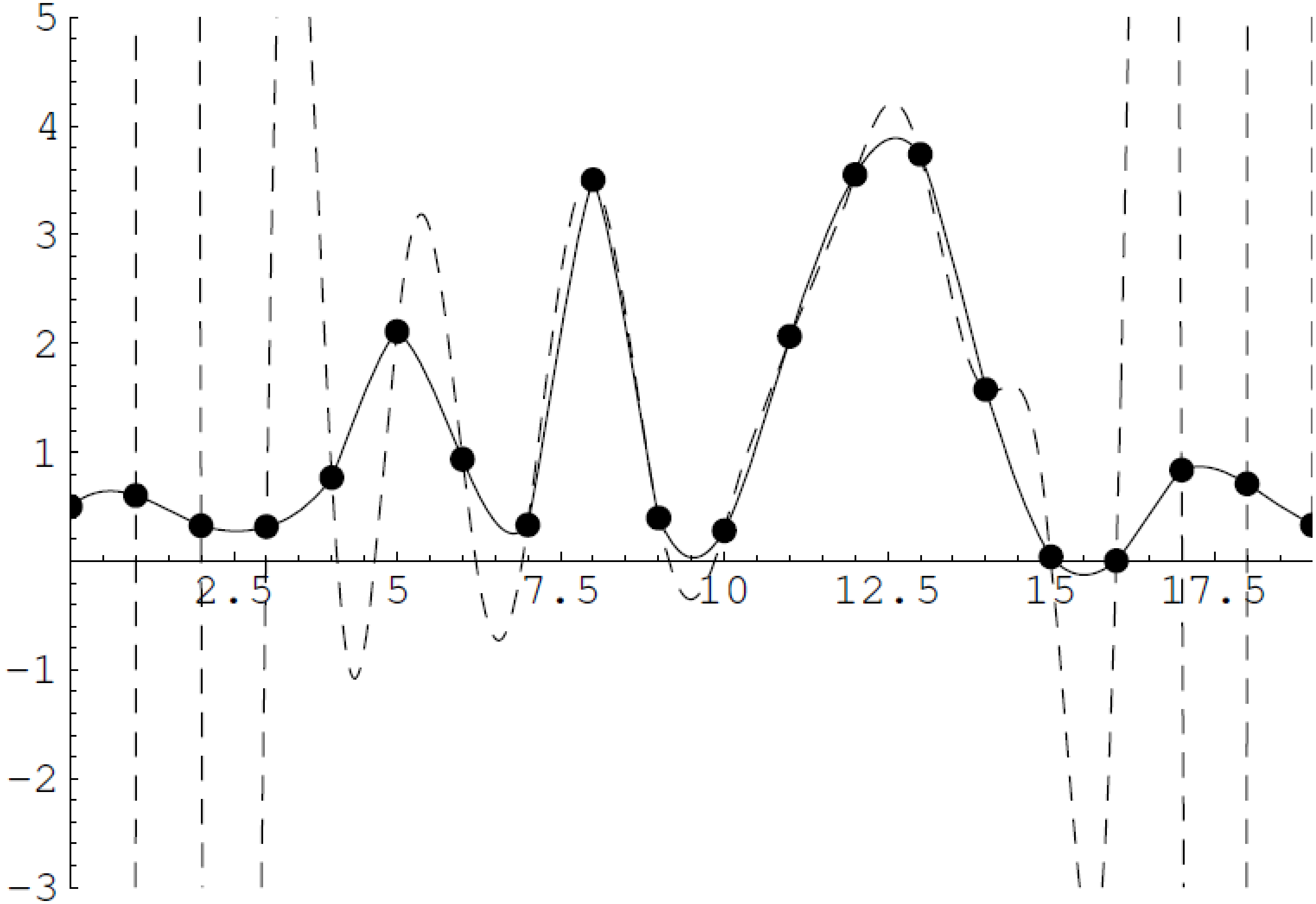
Respuesta:

$$P(x)=11-5(x+2)+(x+2)(x-1)=x^2-4\mathrm{x}-1$$

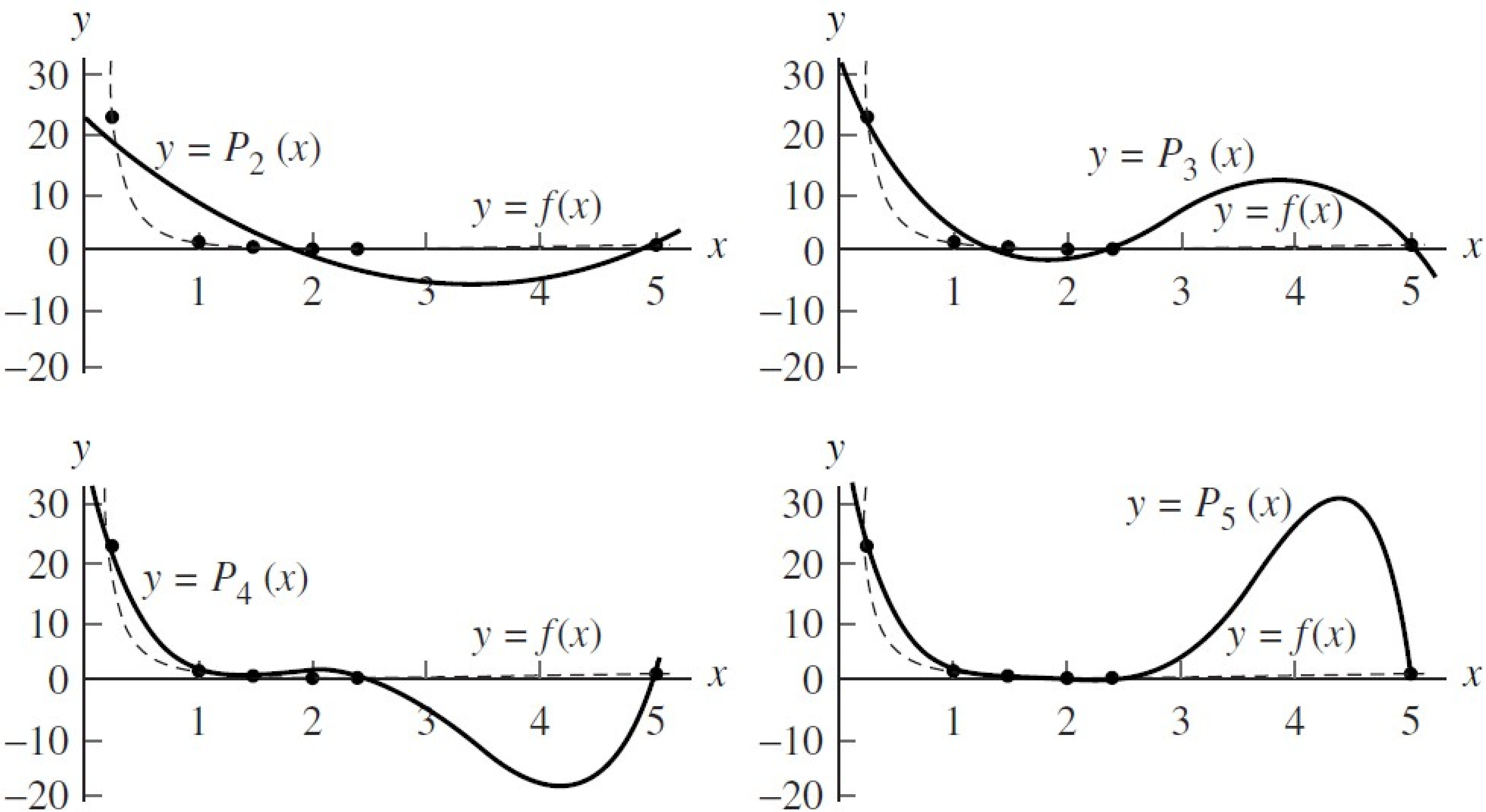
$P(-1)=4$, $P(0)=-1$.

Problemas de interpolación polinómica

En un polinomio interpolador de grado n es posible tener $n-1$ extremos, lo cual trae como consecuencia **que tenga muchas oscilaciones al pasar por los puntos dados**. Por este razón, **un polinomio de grado 6 o superior usan raro**.

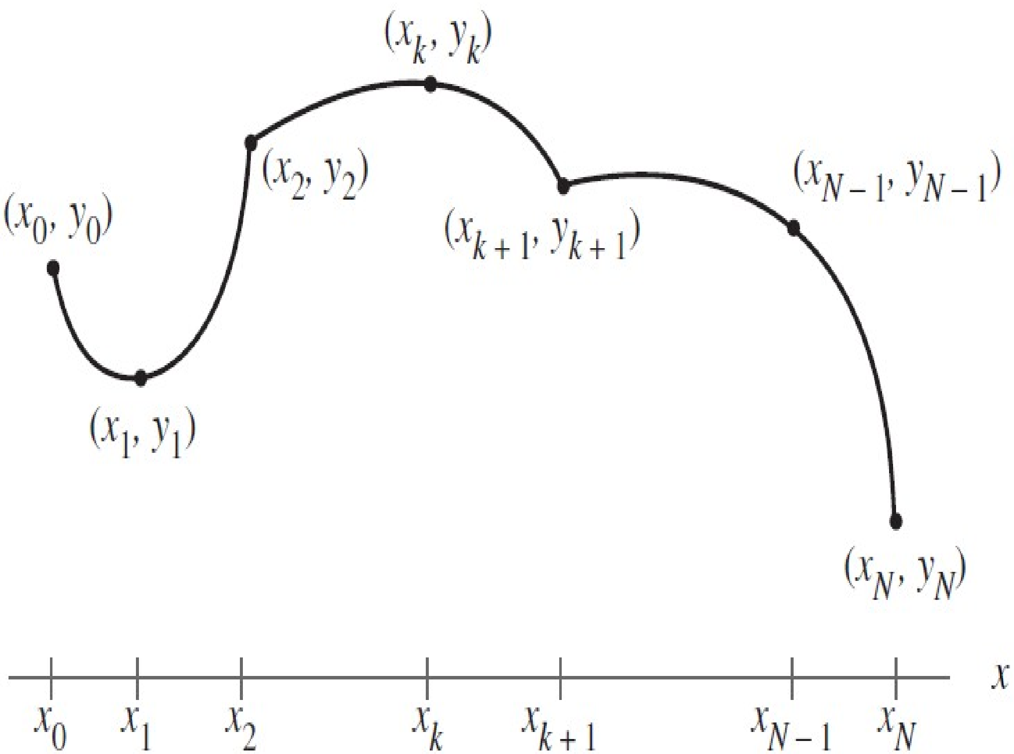


Problemas de interpolación polinómica

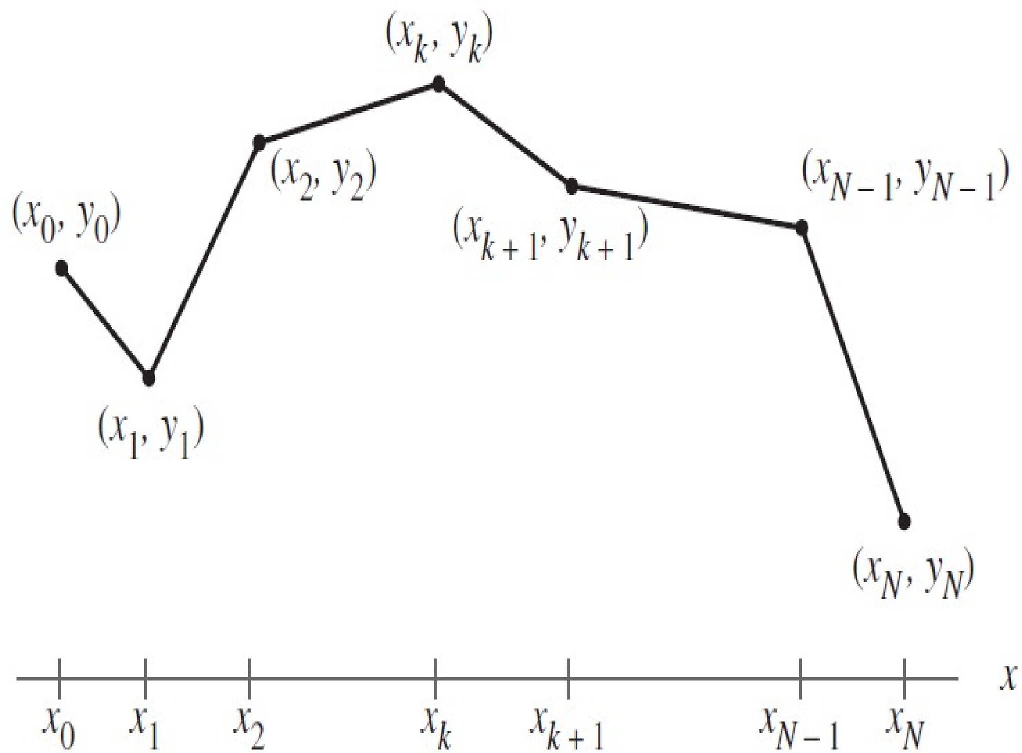


Interpolación a trozos

Polinomial

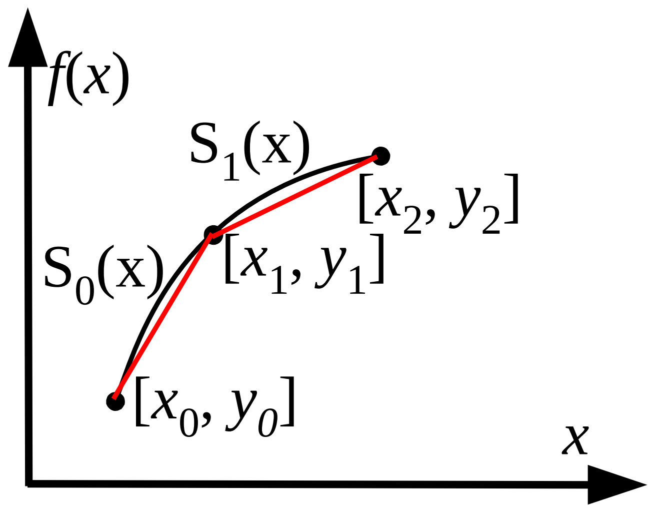


Lineal



Una alternativa para evitar problemas de oscilaciones es construir una serie de polinomios $S_k(x)$ que solo interpolen dos nodos consecutivos y luego unirlos en sus cabos, el conjunto $\{S_k(x)\}$ forman una curva polinomial a trozos o spline que notaremos $S(x)$

Interpolación lineal



Dados los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, construyamos la **función interpolante** *S(x)* como una función definida a trozos $S(x) = \{S_k(x)\}$, donde

1. cada trozo $S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k)$ es una función lineal definida en el intervalo $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

2. $S(x_k) = y_k$ para todos *k*, i.e. $S_k(x_k) = y_k$ y $S_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$

Interpolación lineal

Para encontrar los coeficientes a_k y b_k evaluamos $S(x)$ en los puntos de tabla. De acuerdo con la figura, tenemos

$$S_0(x_0)=a_0+b_0(x_0-x_0)=y_0 \;\; => \;\; \boxed{a_0=y_0}$$

$$S_0(x_1)=a_0+b_0(x_1-x_0)=y_1 \;\; => \;\; \boxed{b_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$$

$$S_1(x_1)=a_1+b_1(x_1-x_1)=y_1 \;\; => \;\; \boxed{a_1=y_1}$$

$$S_1(x_2)=a_1+b_1(x_2-x_1)=y_2 \;\; => \;\; \boxed{b_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Finalmente, para trozo

$$S_k(x)=a_k+b_k(x-x_k)$$

los coeficientes son

$$\boxed{a_k=y_k} \;\; \text{y} \;\; \boxed{b_k=\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}}$$

Interpolación lineal. Ejemplo

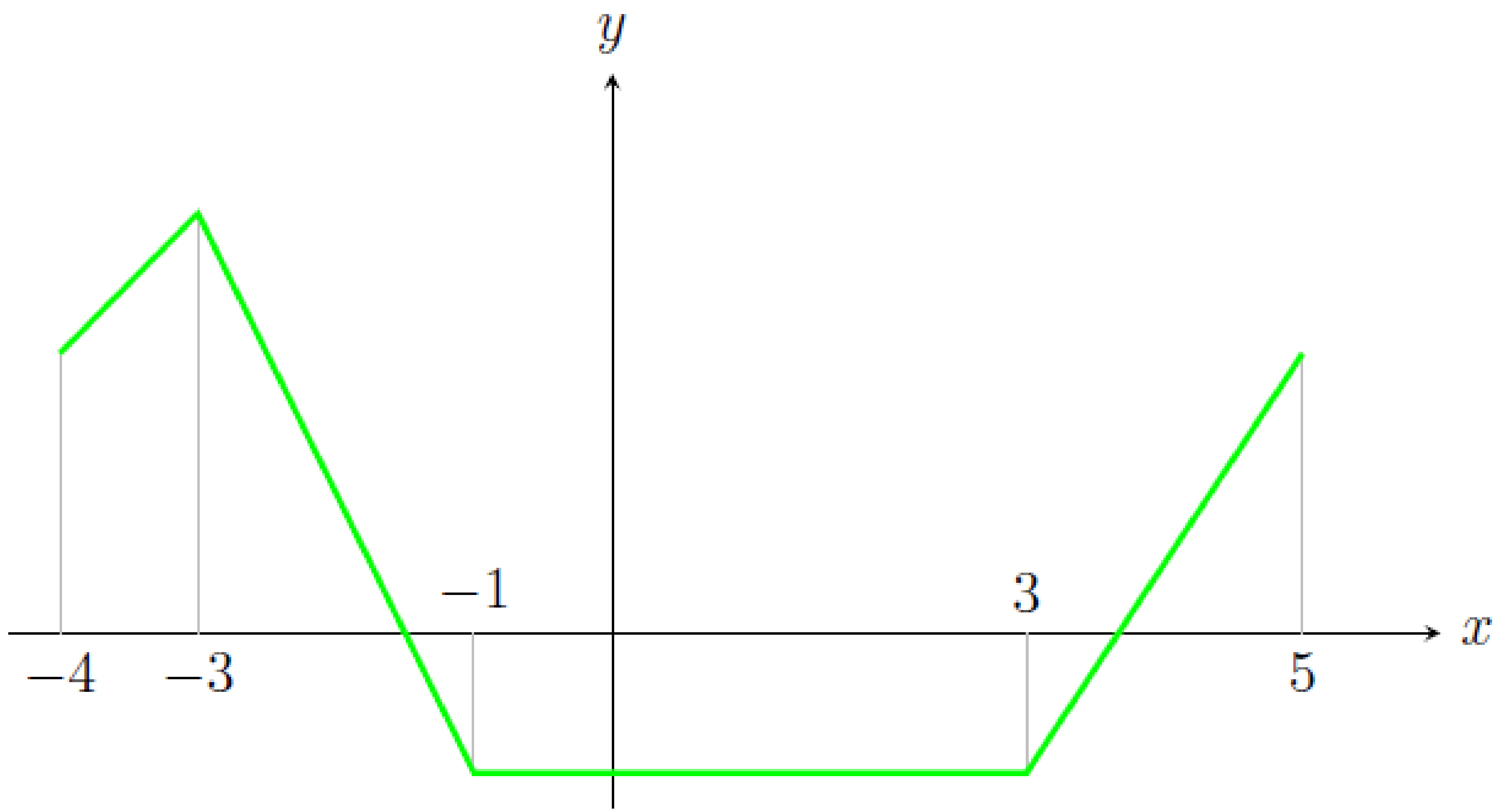
Ejemplo. Construir la función interpolante lineal a trozos *S(x)*, que corresponda a los puntos

$$x_0 = -5\ ;\ \ x_1 = -3\ ;\ \ x_2 = -1\ ;\ \ x_3 = 3\ ;\ \ x_4 = 5$$

y los valores

$$y_0 = 2\ ;\ \ y_1 = 3\ ;\ \ y_2 = -1\ ;\ \ y_3 = -1\ ;\ \ y_4 = 2\ :$$

Calcular $S(4)$.



Interpolación lineal. Ejemplo

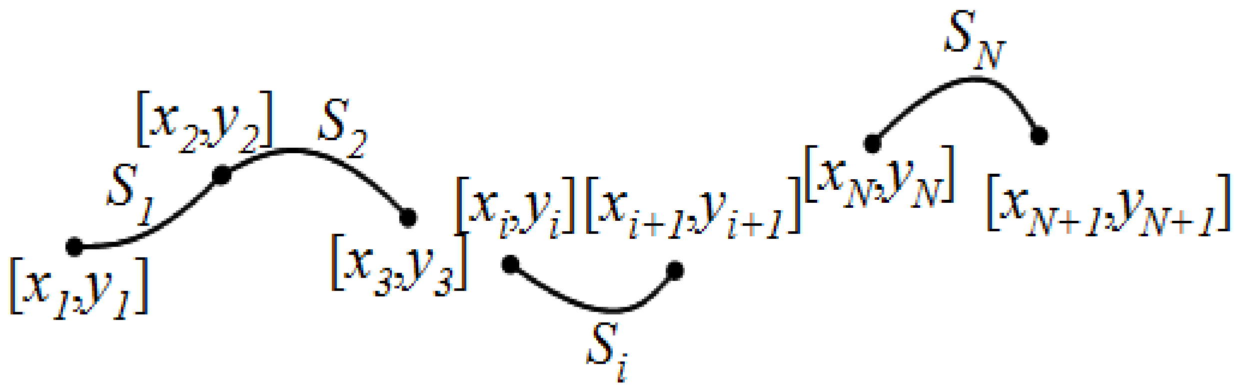
Solución. Calculamos coeficientes y los ecuaciones de los trozos

x_k	y_k	$a_k = y_k$	$b_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$	$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k)$
$x_0 = -5$	$y_0 = 2$	$a_0 = 2$	$b_0 = \dfrac{1}{2}$	$S_0(x) = 2 + \dfrac{1}{2}(x+5)$
$x_1 = -3$	$y_1 = 3$	$a_1 = 3$	$b_1 = -2$	$S_1(x) = 3 - 2(x+3)$
$x_2 = -1$	$y_2 = -1$	$a_2 = -1$	$b_2 = 0$	$S_2(x) = -1$
$x_3 = 3$	$y_3 = -1$	$a_3 = -1$	$b_3 = \dfrac{3}{2}$	$S_3(x) = -1 + \dfrac{3}{2}(x-3)$
$x_4 = 5$	$y_4 = 2$			

Para calcular $S(4)$, buscamos el segmento de forma $[x_k, x_{k+1}]$ donde esta $x=4$. Es fácil ver que $4 \in [x_3, x_4]$, i.e. $k=3$.

$$S(4) = S_3(4) = -1 + \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Interpolación Spline cúbica



Consideremos una **red de nodos** $\{x_i\}$ definidos en el intervalo $[a,b]$

$$a=x_1<x_2<\ldots<x_N<x_{N+1}=b\ . \tag{1}$$

Spline cubico de función $f(x),\ x\in[a,b]$ en la red (1) es la función $S(x)$ que cumple con las **condiciones** siguientes:

C1. En cada segmento $[x_i, x_{i+1}]$ $S(x)$ es un polinomio cubico.

$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3 \qquad x_i\le x\le x_{i+1} \tag{2}$$

C2. La función $S(x)$, sus derivadas $S'(x)$ y $S''(x)$ son continuos en $[a,b]$. Esto significa que $S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i)$, $S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i)$, $S''_{i-1}(x_i)=S''_i(x_i)$ en puntos internos de polinomio $i=2,\ldots,N$.

C3. En cada punto x_i el valor $S(x_i)=f(x_i)=y_i$, $i=1,\ldots,N+1$.

Interpolación Spline cúbica

N segmentos de spline definidos como

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

nos dan **4*N incógnitos** (a_i, b_i, c_i, d_i) .

Condiciones de continuidad (C2) nos permiten escribir 3*(N-1) ecuaciones.

Condiciones de interpolación (C3) nos dan N+1 ecuaciones **independientes** de condiciones C2. Por ejemplo, en punto x_2 los dos ecuaciones de interpolación $S_1(x_2) = y_2$, $S_2(x_2) = y_2$ y uno de continuidad de spline $S_1(x_2) = S_2(x_2)$ nos dan solo dos ecuaciones independientes.

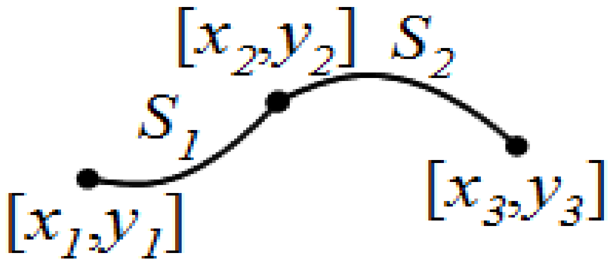
Dos ecuaciones adicionales que faltan para calcular los coeficientes de spline $4 \cdot N - 3 \cdot (N - 1) - (N + 1) = 2$ son los **condiciones de frontera**.

Existe diferentes condiciones de frontera. Por ejemplo:

Frontera libre o frontera natural $S''(a) = S''(b) = 0$ para **splines cúbicos naturales.** (vamos usar estos condiciones en nuestro curso)

O $S'(x_1) = \alpha$, $S'(x_{N+1}) = \beta$ donde α y β son valores dados (**frontera sujeta**).

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.



$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & x_1 \le x \le x_2 \\ S_2(x), & x_2 \le x \le x_3 \end{cases}$$

N – es numero de segmentos en spline interpolador (N=2 en este caso)
N+1 nodos

$$S_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)+\frac{c_1}{2}(x-x_1)^2+\frac{d_1}{6}(x-x_1)^3 \qquad (1)$$

$$S_2(x)=a_2+b_2(x-x_2)+\frac{c_2}{2}(x-x_2)^2+\frac{d_2}{6}(x-x_2)^3 \qquad (2)$$

a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_2	d_2

4*2=8 incógnitas

Condiciones.

1. Continuidad del spline $S_1(x_2)=S_2(x_2)$ (3) (N-1) ecu.
2. Continuidad de primera derivada $S'_1(x_2)=S'_2(x_2)$ (4) (N-1) ecu.
3. Continuidad de segunda derivada $S''_1(x_2)=S''_2(x_2)$ (5) (N-1) ecu.
4. Frontera $S''_1(x_1)=S''_2(x_3)=0$ (6) (2 ecu.)
5. Condición de interpolador

$S_1(x_1)=y_1,\ \ S_1(x_2)=y_2,\ \ S_2(x_2)=y_2,\ \ S_2(x_3)=y_3$ (7) (N+1 ecu)

(solo N+1 ecu. **independientes** (vee cond. 1)

Interpolación Spline cúbica. Ejemplo.

Tenemos 4N incógnitas y N-1+ N-1+ N-1+2+ N+1=**4N ecuaciones**.

Evaluamos los valores de los segmentos en nodos $S_1(x_1)$ y $S_2(x_2)$

$$S_1(x_1)=y_1=a_1+b_1\cancel{(x_1-x_1)}+\frac{c_1}{2}\cancel{(x_1-x_1)}^2+\frac{d_1}{6}\cancel{(x_1-x_1)}^3=a_1 \;\Rightarrow\; \boxed{a_1=y_1} \qquad (8)$$

$$S_2(x_2)=y_2=a_2+b_2\cancel{(x_2-x_2)}+\frac{c_2}{2}\cancel{(x_2-x_2)}^2+\frac{d_2}{6}\cancel{(x_2-x_2)}^3=a_2 \;\Rightarrow\; \boxed{a_2=y_2} \qquad (9)$$

Derivadas de los segmentos del spline

$$S'_1(x)=b_1+c_1(x-x_1)+\frac{d_1}{2}(x-x_1)^2 \qquad (10)$$

$$S'_2(x)=b_2+c_2(x-x_2)+\frac{d_2}{2}(x-x_2)^2 \qquad (11)$$

$$S''_1(x)=c_1+d_1(x-x_1) \qquad (12)$$

$$S''_2(x)=c_2+d_2(x-x_2) \qquad (13)$$

Evaluamos los valores de $S''_1(x_1)$ y $S''_2(x_3)$

$$0=S''_1(x_1)=c_1+d_1\cancel{(x_1-x_1)}=c_1 \;\Rightarrow\; \boxed{c_1=0} \qquad (14)$$

$$0=S''_2(x_3)=c_2+d_2(x_3-x_2) \qquad (15)$$

De **continuidad de segunda derivada del spline en punto** x_2

$$c_1+d_1(x_2-x_1)=c_2+d_2\cancel{(x_2-x_2)} \;\Rightarrow\; 0+d_1(x_2-x_1)=c_2 \qquad (16)$$

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.

De **continuidad de primera derivada del spline en punto** x_2

$$b_1+c_1(x_2-x_1)+\frac{d_1}{2}(x_2-x_1)^2=b_2+c_2\cancel{(x_2-x_2)}+\frac{d_2}{2}\cancel{(x_2-x_2)}^2 \ \Rightarrow$$

$$b_1+0\cancel{(x_2-x_1)}+\frac{d_1}{2}(x_2-x_1)^2=b_2 \qquad (17)$$

De **continuidad del spline en punto** x_2

$$a_1+b_1(x_2-x_1)+\frac{c_1}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{d_1}{6}(x_2-x_1)^3=$$

$$=a_2+b_2(x_2-x_2)+\frac{c_2}{2}(x_2-x_2)^2+\frac{d_2}{6}(x_2-x_2)^3 \ \Rightarrow$$

$$a_1+b_1(x_2-x_1)+\frac{0}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{d_1}{6}(x_2-x_1)^3=a_2 \qquad (18)$$

Ecuaciones (15), (16), (17), (18) y ecuación $S_2(x_3)=y_3$ de (7) usamos para **encontrar resto de las incógnitas** b_1, d_1, b_2, c_2, d_2 .

Repetimos estés ecuaciones con **sustitución** $h_1=x_2-x_1$, $h_2=x_3-x_2$, $y_1=a_1$, $y_2=a_2$.

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.

de (15) $c_2 = -d_2 h_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{-c_2}{h_2}$ (19)

de (16) $d_1 h_1 = c_2 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{c_2}{h_1}$ (20)

de (17) $b_1 + \frac{d_1}{2} h_1^2 = b_2$ (21)

de (18) $y_1 + b_1 h_1 + \frac{d_1}{6} h_1^3 = y_2$ (22)

de (7) $y_3 = y_2 + b_2 h_2 + \frac{c_2}{2} h_2^2 + \frac{d_2}{6} h_2^3$ (23)

Encontramos b_1 del (22)

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{d_1}{6} h_1^2 \qquad (24)$$

y sustituimos en (21)

$$b_1 + \frac{d_1}{2} h_1^2 = b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{d_1}{6} h_1^2 + \frac{d_1}{2} h_1^2 \Rightarrow b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} + \frac{d_1 h_1^2}{3} \qquad (25)$$

Con uso (19), (20) y (25) **reescribimos (23)** como

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.

$$y_3 = y_2 + h_2\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} + \frac{c_2 h_1}{3}\right) + \frac{c_2}{2} h_2^2 - \frac{c_2}{6} h_2^2 \;=>$$

$$\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{c_2 h_1}{3} + \frac{c_2 h_2}{2} - \frac{c_2 h_2}{6} \;=>\; \boxed{2 c_2 (h_1 + h_2) = 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right)} \qquad (26)$$

(compara con ecu. de caso general)

En caso de la red equidistante $h_1 = h_2 = const$

$$\boxed{4 c_2 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2 y_2 + y_3)} \qquad (27)$$

(compara con ecu. de caso general)

Calculamos resto de las incógnitas

$$\boxed{d_1 = \frac{c_2}{h_1}} \quad \boxed{d_2 = \frac{-c_2}{h_2}} \quad \boxed{b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{d_1}{6} h_1^2} \quad \boxed{b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} + \frac{d_1 h_1^2}{3}}$$

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.

Construimos un spline cubico para datas siguientes

$$x_1=1\ ,\ \ x_2=2\ ,\ \ x_3=3\ ,\ \ y_1=1\ ,\ \ y_2=3\ ,\ \ y_3=2$$

Tenemos

$$h_1=h_2=1\ ,\ \ a_1=y_1=1\ ,\ \ a_2=y_2=3\ ,\ \ c_1=0$$

Calculamos los valores de coeficientes incógnitos de los trozos del spline con ecuaciones

$$c_2=3\frac{y_3-2y_2+y_1}{2h^2}\ ,\ \ d_1=\frac{c_2}{h}\ ,\ \ d_2=\frac{-c_2}{h}\ ,\ \ b_1=\frac{y_2-y_1}{h}-\frac{d_1h^2}{6}\ ,\ \ b_2=\frac{y_2-y_1}{h}+\frac{d_1h^2}{3}\ .$$

Obtenemos

$$b_1=2.75\ ,\ \ b_2=0.5\ ,\ \ c_2=-4.5\ ,\ \ d_1=-4.5\ ,\ \ d_2=4.5\ .$$

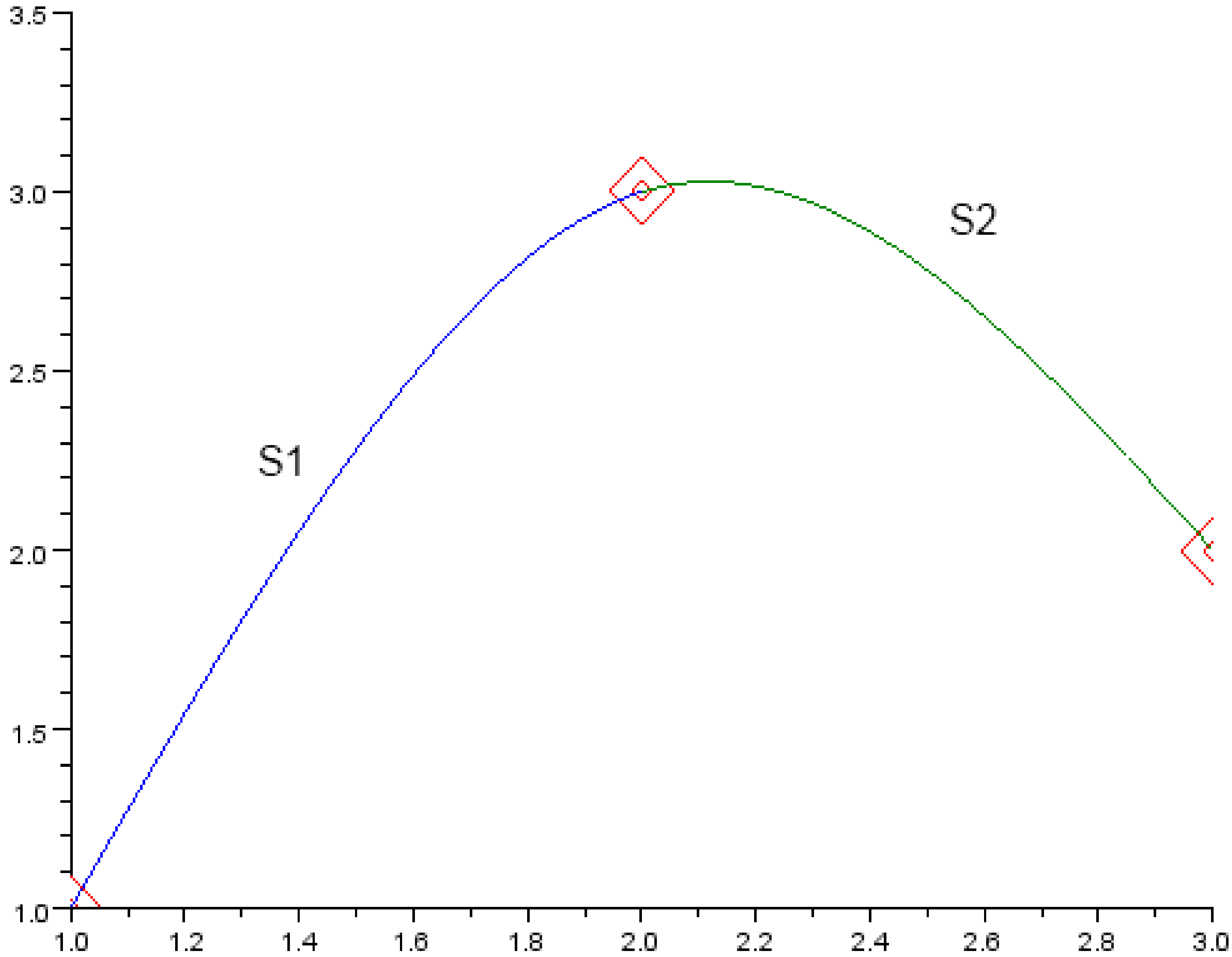
Formulas de los trozos son

$$S_1(x)=1+2.75(x-1)-\frac{4.5}{6}(x-1)^3 \qquad x_1<x<x_2$$

$$S_2(x)=3+0.5(x-2)-\frac{4.5}{2}(x-2)^2+\frac{4.5}{6}(x-2)^3 \qquad x_2<x<x_3$$

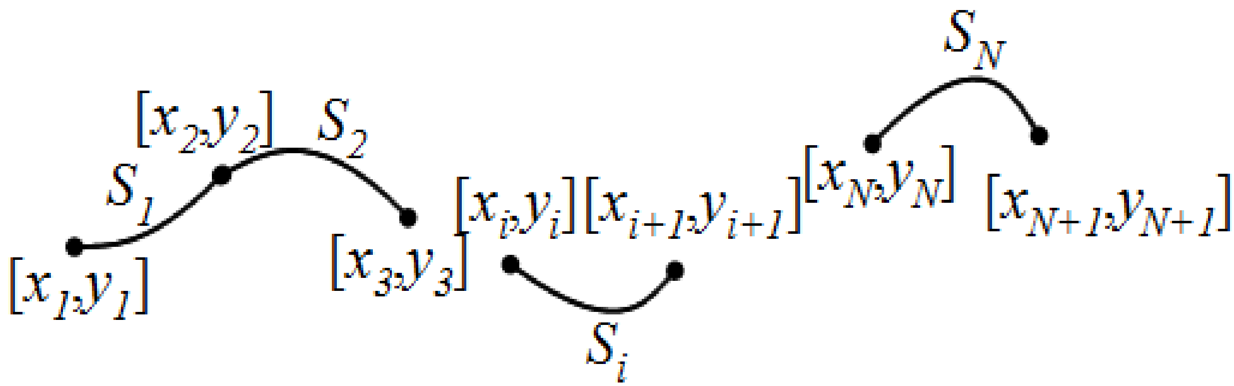
Con programa SplineExample.sce obtenemos siguiente figura.

Interpolación spline cúbica. Ejemplo.



.

Construcción de spline cúbica. Caso general.



Tenemos $N+1$ puntos de interpolación $\{x_i, y_i\}$ $i=1,\ldots,N+1$ ordenados tan que $x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1}$.

En cada segmento $[x_i, x_{i+1}]$ buscamos spline $S(x)$ como un polinomio cubico.

$$S_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3\ , \quad x_i\le x\le x_{i+1}\ , \quad i=1,\ldots,N \qquad (1)$$

N segmentos de spline nos dan **4*N incógnitos** (a_i, b_i, c_i, d_i) .

Derivadas de spline

$$S'_i(x)=b_i+c_i(x-x_i)+\frac{d_i}{2}(x-x_i)^2\ , \qquad S''_i(x)=c_i+d_i(x-x_i)$$

Por esto $S_i(x_i)=a_i$, $S_i'(x_i)=b_i$, $S_i''(x_i)=c_i$

Construcción de spline cúbica. Caso general.

Dado que el valor del spline en cada punto x_i es igual a valor de función $S_i(x_i)=f(x_i)=y_i$ tenemos $S_i(x_i)=a_i+b_i\cancel{(x_i-x_i)}+\frac{c_i}{2}\cancel{(x_i-x_i)^2}+\frac{d_i}{6}\cancel{(x_i-x_i)^3}$ =>

$$\Rightarrow \quad a_i=y_i \qquad i=1,\ldots,N \qquad (2)$$

Podemos extender esta ecuación para $i=1,\ldots,N+1$ si definimos $a_{N+1}=y_{N+1}$

De continuidad de spline en puntos internos x_i $i=2,\ldots,N$ tenemos, $S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i)$ =>

$$a_{i-1}+b_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{c_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{d_{i-1}}{6}(x_i-x_{i-1})^3=a_i \ .$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2) tenemos

$$b_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{c_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{d_{i-1}}{6}(x_i-x_{i-1})^3=y_i-y_{i-1} \qquad i=2,\ldots,N+1 \qquad (3)$$

De continuidad de primera derivada de spline en puntos internos x_i $i=2,\ldots,N$ tenemos, $S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i)$ =>

Construcción de spline cúbica. Caso general.

$$b_{i-1}+c_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{d_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2=b_i+c_i\cancel{(x_i-x_i)}+\frac{d_i}{2}\cancel{(x_i-x_i)}^2 \text{ , o}$$

$$c_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{d_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2=b_i-b_{i-1} \qquad i=2,\ldots,N \qquad (4)$$

De continuidad de segunda derivada de spline en puntos internos x_i $i=2,\ldots,N$ tenemos, $S''_{i-1}(x_i)=S''_i(x_i)$ =>

$$c_{i-1}+d_{i-1}(x_i-x_{i-1})=c_i+d_i\cancel{(x_i-x_i)} \text{ , o}$$

$$d_{i-1}(x_i-x_{i-1})=c_i-c_{i-1} \qquad i=2,\ldots,N \qquad (5)$$

Ecuaciones (3), (4) y (5) nos dan $(N)+(N-1)+(N-1)$ para $3\cdot N$ incognitos (b_i, c_i, d_i). Dos ecuaciones, que faltan, escribimos con uso los **condiciones de frontera** $S''_1(x_1)=S''_N(x_{N+1})=0$.

$$S''_1(x_1)=c_1+d_1(x_1-x_1)=0 \Rightarrow c_1=0 \qquad (6)$$

$$S''_N(x_{N+1})=c_N+d_N(x_{N+1}-x_N)=0 \qquad (7)$$

La ecuación (7) puede ser implicada en la ecuación (5) si se supone que $c_{N+1}=0$. Esto expande ecuación (5) a $i=2,\ldots,N+1$

Construcción de spline cúbica. Caso general.

Al fin recibimos **un sistema lineal cerrado** con $3N$ ecuaciones y $3N$ coeficientes desconocidos $b_i, c_i, d_i \quad i=1,\dots,N$.

$$b_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{c_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2+\frac{d_{i-1}}{6}(x_i-x_{i-1})^3=y_i-y_{i-1} \qquad i=2,\dots,N+1$$

$$c_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\frac{d_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})^2=b_i-b_{i-1} \qquad i=2,\dots,N$$

$$d_{i-1}(x_i-x_{i-1})=c_i-c_{i-1} \qquad c_{N+1}=0 \qquad i=2,\dots,N+1$$

y $c_1=0$

Reescribimos el sistema con definición $h_i=x_{i+1}-x_i \quad i=1,\dots,N$. Tenemos

$$b_{i-1}h_{i-1}+\frac{c_{i-1}}{2}h_{i-1}^2+\frac{d_{i-1}}{6}h_{i-1}^3=y_i-y_{i-1} \qquad i=2,\dots,N+1 \qquad (8)$$

$$c_{i-1}h_{i-1}+\frac{d_{i-1}}{2}h_{i-1}^2=b_i-b_{i-1} \qquad i=2,\dots,N \qquad (9)$$

$$d_{i-1}h_{i-1}=c_i-c_{i-1} \qquad c_{N+1}=0 \qquad i=2,\dots,N+1 \qquad (10)$$

y $c_1=0$ (11)

Construcción de spline cúbica. Caso general.

Reducción de la sistema

Eliminamos coeficientes b_i, d_i del sistema (8)-(11).

Obtenemos b_{i-1} de (8)

$$b_{i-1}=\frac{-c_{i-1}}{2}h_{i-1}-\frac{d_{i-1}}{6}h_{i-1}^2+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{12}$$

Para próximo segmento de spline obtenemos

$$b_i=\frac{-c_i}{2}h_i-\frac{d_i}{6}h_i^2+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \tag{13}$$

Restamos la ecuación (12) de (13)

$$b_i-b_{i-1}=\frac{-c_i}{2}h_i-\frac{d_i}{6}h_i^2+\frac{c_{i-1}}{2}h_{i-1}+\frac{d_{i-1}}{6}h_{i-1}^2+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{14}$$

Expresión de b_i-b_{i-1} de (14) sustituimos en (9). Recibimos

$$c_{i-1}h_{i-1}+\frac{d_{i-1}}{2}h_{i-1}^2=\frac{-c_i}{2}h_i-\frac{d_i}{6}h_i^2+\frac{c_{i-1}}{2}h_{i-1}+\frac{d_{i-1}}{6}h_{i-1}^2+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad \text{o}$$

Construcción de spline cúbica. Caso general.

$$3c_i h_i + 3c_{i-1} h_{i-1} + d_i h_i^2 + 2d_{i-1} h_{i-1}^2 = 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right] \qquad (15)$$

Usamos (10) para obtener d_{i-1} y d_i. Tenemos

$$d_{i-1} = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-1}} \quad \text{y} \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_i} \;. \qquad (16)$$

Expresiones para d_{i-1} y d_i sustituimos en (15). Tenemos

$$3c_i h_i + 3c_{i-1} h_{i-1} + (c_{i+1} - c_i) h_i + 2(c_i - c_{i-1}) h_{i-1} = 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right] \text{. O}$$

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) c_i + h_i c_{i+1} = 6\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right], \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (17)$$

(17) con $c_1 = c_{N+1} = 0$ es a un sistema **tridiagonal** de ecuaciones lineales con $N-1$ ecuaciones y $N-1$ desconocidos $(c_2, \ldots, c_N)$.

Construcción de spline cúbica. Caso general.

Con los valores de c_i podemos calcular los coeficientes del spline usando las fórmulas $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_i}$ y $b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{c_i}{2} h_i - \frac{d_i}{6} h_i^2$ $\quad i = 1, \ldots, N \quad$ (18)

Si la red de los puntos de interpolación es equidistante, es decir $h_i = h = const$, las ecuaciones (17) toman una forma particularmente simple:

$$c_{i-1} + 4 c_i + c_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - 2 y_i + y_{i-1}}{h^2} \right) \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (19)$$

La matriz es estrictamente diagonal dominante por esto polinomio existe y es único.

Spline cúbica. Ejemplo.

Construimos un spline cubica para datas siguientes

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $y_1=1$, $y_2=3$, $y_3=2$, $y_4=0.5$, $y_5=1.5$.

Tenemos

$h_i=1$, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=0.5$, $a_5=1.5$, $c_1=0$, $c_5=0$.

El sistema (19) es

$$0+4c_2+c_3=-18$$

$$c_2+4c_3+c_4=-3$$

$$c_3+4c_4+0=15$$

O en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

La matriz es estrictamente diagonal dominante. Obtenemos

$c_2=-4.3392857$, $c_3=-0.6428571$, $c_4=3.9107143$.

Spline cúbica. Ejemplo.

Con $c_1=0$, $c_5=0$ tenemos.

$$c=[0,-4.3392857,-0.6428571,3.9107143,0]$$

Con (18) calculamos los valores de coeficientes incógnitos de los trozos del spline. Obtenemos

$$b=[2.7232143,0.5535714,-1.9375,-0.3035714]$$

$$d=[-4.3392857,3.6964286,4.5535714,-3.9107143,0]$$

Formulas de los trozos son

$$S_1(x)=1+2.7232143(x-1)-\frac{4.3392857}{6}(x-1)^3 \quad x_1\le x\le x_2$$

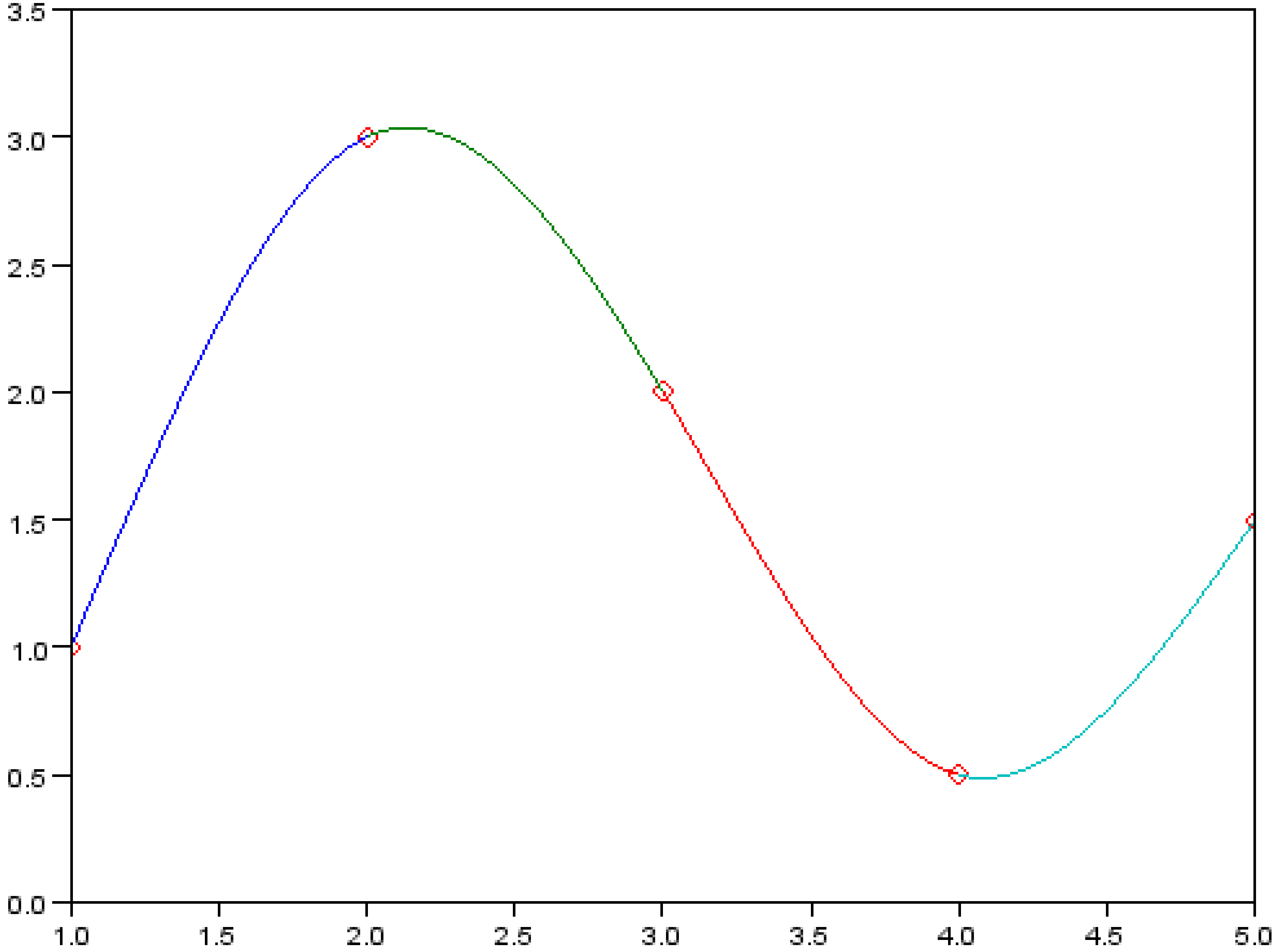
$$S_2(x)=3+0.5535714(x-2)-\frac{4.3392857}{2}(x-2)^2+\frac{3.6964286}{6}(x-2)^3 \quad x_2\le x\le x_3$$

$$S_3(x)=2-1.9375(x-3)-\frac{0.6428571}{2}(x-3)^2+\frac{4.5535714}{6}(x-3)^3 \quad x_3\le x\le x_4$$

$$S_4(x)=0.5-0.3035714(x-4)+\frac{3.9107143}{2}(x-4)^2-\frac{3.9107143}{6}(x-4)^3 \quad x_4\le x\le x_5$$

Con programa SplineExample2.sce obtenemos siguiente figura

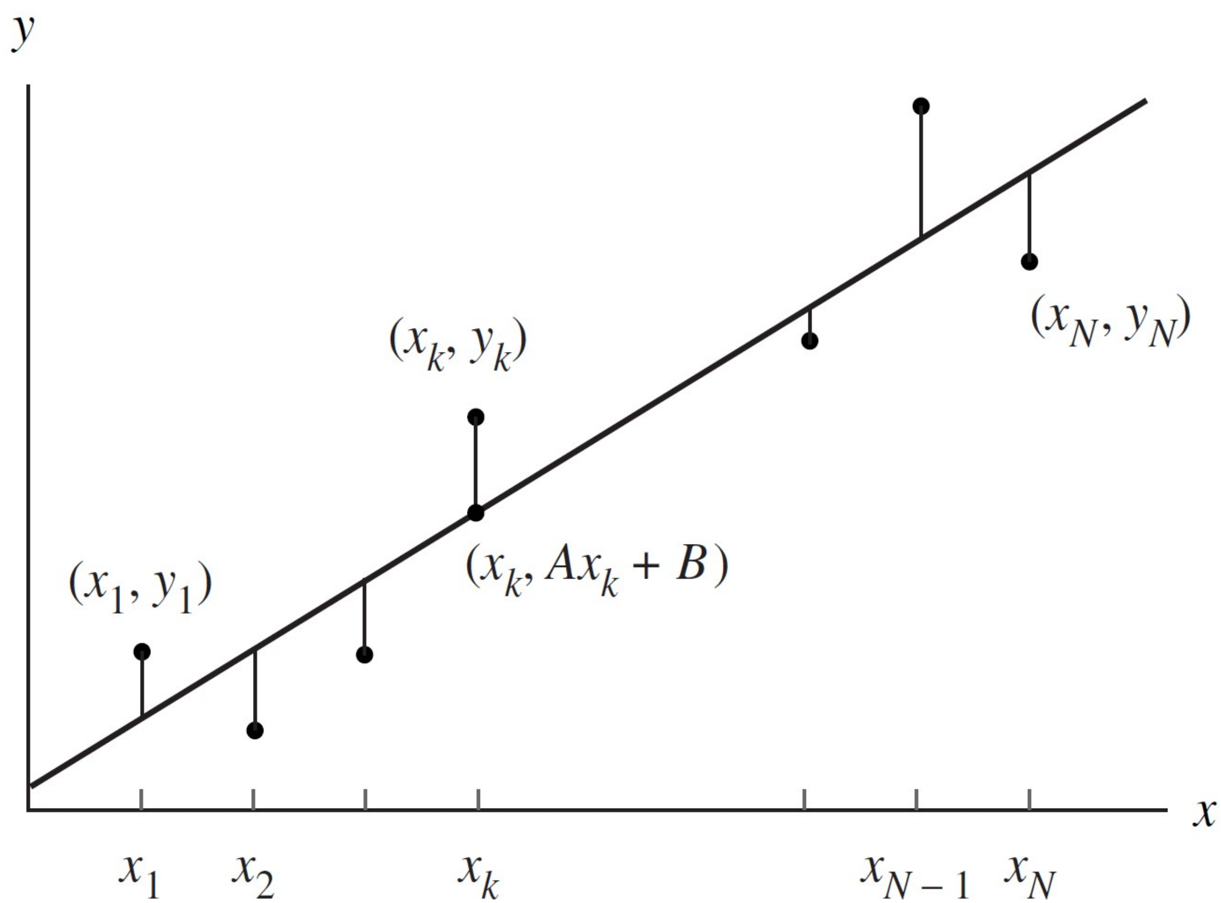
Spline cúbica. Ejemplo.



Ajuste de curvas. Recta de mínimos cuadrados

Dados un conjunto de pares $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N}$, se intenta **encontrar la función** $f(x_k)$ **que mejor se aproxime** a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el **criterio de mínimo error cuadrático**.

$$E_2(f)=\left(\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)-y_k|^2\right)^{1/2}$$



Se intenta **minimizar** la **suma de cuadrados de las diferencias** ordenadas (llamadas **residuos**) **entre** los puntos generados por **la función y** los correspondientes en **los datos**.

$$min(E_2(f))$$

La recta de mínimos cuadrados

$\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{N}$ sea un conjunto de puntos *N*, donde las abscisas $\{x_k\}$ son distintas. El recta de mínimos cuadrados $y = f(x) = ax + b$ es la línea que minimiza el error de mínimo error cuadrático

$$E_2(a,b) = \left(\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

Entonces buscamos $min\left[\left(\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - y_k|^2 \right)^{1/2} \right] = min\left(\sum_{k=1}^{N} |ax_k + b - y_k|^2 \right)$

En este ecuación los valores x_k u y_k son constantes y los valores ***a*** y ***b* son variables** que queremos encontrar.

El **mínimo** de error esta en el punto donde derivadas parciales de función de error son **iguales de cero**.

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{k=1}^{N} |ax_k + b - y_k|^2 \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{k=1}^{N} |ax_k + b - y_k|^2 \right) = 0$$

Recuerde que $\dfrac{d|x|}{dx} = sign(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

La recta de mínimos cuadrados

Derivadas parciales con respeto de a y b son

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{k=1}^{N}|ax_k+b-y_k|^2\right)=\sum_{k=1}^{N}2|ax_k+b-y_k|\frac{ax_k+b-y_k}{|ax_k+b-y_k|}x_k=2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k-y_k\,x_k\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{k=1}^{N}|ax_k+b-y_k|^2\right)=2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k+b-y_k\right)$$

Entonces $$0=\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k-y_k\,x_k\right)=a\sum_{k=1}^{N}x_k^2+b\sum_{k=1}^{N}x_k-\sum_{k=1}^{N}y_k\,x_k$$

$$0=\sum_{k=1}^{N}\left(a\,x_k+b-y_k\right)=a\sum_{k=1}^{N}x_k+bN-\sum_{k=1}^{N}y_k$$

o en el forma convencional

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k^2\right)a+\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)b&=\sum_{k=1}^{N}y_k\,x_k\\ \left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)a+N\,b&=\sum_{k=1}^{N}y_k\end{aligned}\qquad(1)$$

La recta de mínimos cuadrados

Para encontrar *a* y *b* este sistema puede ser resuelto, por ejemplo, con el método de eliminación del Gauss. Pero siguiente método es preferido

Introducimos $S_x = \sum_{k=1}^{N} x_k$, $S_y = \sum_{k=1}^{N} y_k$, $S_{xy} = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$, $S_{x2} = \sum_{k=1}^{N} x_k^2$.

Reescribimos el sistema (1)

$$S_{x2} a + S_x b = S_{xy} \quad (2)$$

$$S_x a + N b = S_y \quad (3)$$

Del (3) del sistema tenemos

$$b = \frac{S_y - S_x a}{N} \ . \quad (4)$$

Sustituimos b en (2). Recibimos

$a = \dfrac{N S_{xy} - S_x S_y}{N S_{x2} - S_x S_x}$, y después $b = \dfrac{1}{N}\left(S_y - S_x a\right)$.

La recta de mínimos cuadrados. Ejemplo

Sea f(x)=3. Entonces a=0, b=3. Los puntos son X=[1, 2, 3, 4] Y=[4, 2, 4, 2].
Entonces el error es igual a 1.

$$E_2(f)=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)-y_k|^2\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}1^2\right)^{1/2}=1$$

$$S_x=\sum_{k=1}^{N}x_k=1+2+3+4=10\ ,\quad S_y=\sum_{k=1}^{N}y_k=4+2+4+2=12\ ,$$

$$S_{xy}=\sum_{k=1}^{N}x_k\,y_k=1\cdot4+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot2=28\ ,\quad S_{x2}=\sum_{k=1}^{N}x_k^2=1^2+2^2+3^2+4^2=30$$

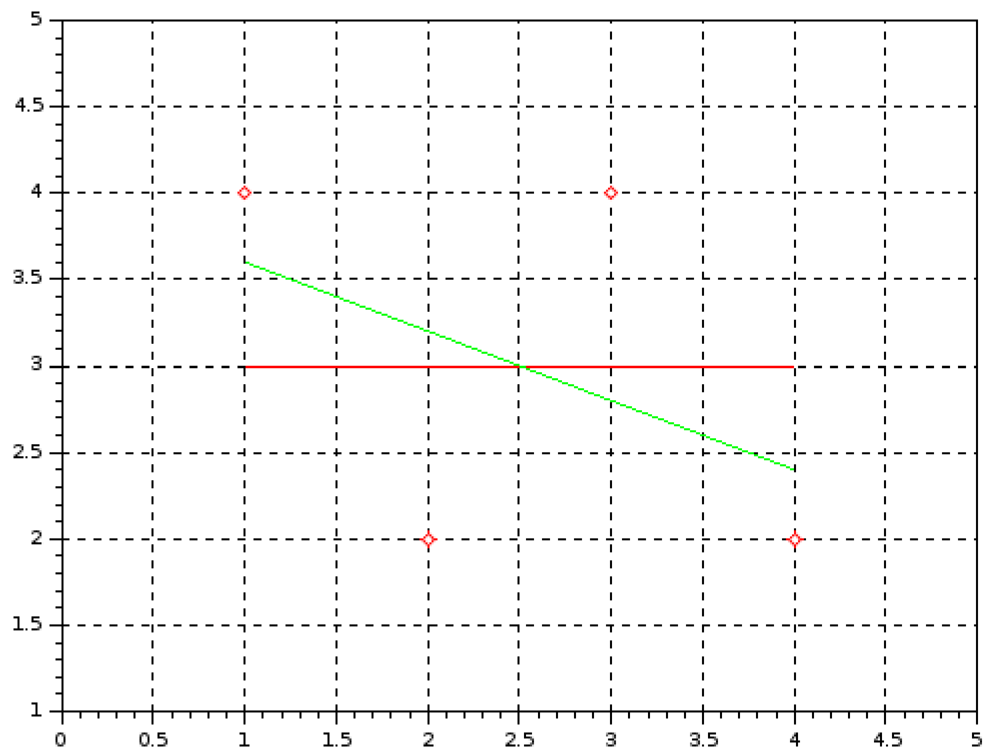
$$a=\frac{N\,S_{xy}-S_x S_y}{N\,S_{x2}-S_x S_x}=\frac{4\cdot28-10\cdot12}{4\cdot30-10\cdot10}=-0.4\qquad b=\frac{1}{N}(S_y-S_x a)=\frac{1}{4}(12+10\cdot0.4)=4$$

El vector de $Y-a\cdot X-b\cdot ones(X)=[0.4,-1.2,1.2,-0.4]$

El error es 0.894427

$$E_2(a,b)=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)-y_k|^2\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}0.4^2+1.2^2+1.2^2+0.4^2\right)^{1/2}=0.894427$$

La recta de mínimos cuadrados. Ejemplo



Preguntas de autoevaluación para Tema 4.

Aproximación, interpolación y extrapolación. Definición, ejemplos, aplicaciones.

Interpolación polinómica. Método de coeficientes indeterminados.

Polinomio en forma de Lagrange

Polinomio en forma de Newton. Diferencias divididas

Interpolación a trozos. Ventaja

Interpolación lineal

Splines cúbicos

Mínimos cuadrados

Funciones internos de Scilab para Interpolacion

bsplin3val — 3d spline arbitrary derivative evaluation function

interp — cubic spline evaluation function

interp1 — one_dimension interpolation function

interp2d — bicubic spline (2d) evaluation function

interp3d — 3d spline evaluation function

interpln — linear interpolation

intsplin — integration of experimental data by spline interpolation

linear_interpn — n dimensional linear interpolation

lsq_splin — weighted least squares cubic spline fitting

smooth — smoothing by spline functions

splin — cubic spline interpolation

splin2d — bicubic spline gridded 2d interpolation

splin3d — spline gridded 3d interpolation

Ejemplo.

```
d=splin(X,Y,"natural");
YY=interp(x, X, Y, d,"natural");
```

Anexo 1. Calculo de diferencias divididas

Queremos desarrollar el programa que recibe tabla de X y Y, y calcula los diferencias divididas (los coeficientes) de polinomio de Newton.

Diferencias divididas

Las diferencias divididas para una función $f(x)$ se define como

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}$$

o en general

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, x_{k-j+2}, \ldots, x_k] - f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

Anexo 1. Calculo de diferencias divididas

Tenemos, por ejemplo, 4 puntos: X=[1,2,3,4] y Y=[1,2,3,4]

Construimos matriz de diferencias divididas D. Ponemos vector Y en el diagonal de matriz D: $D_{11}=Y_1$, $D_{22}=Y_2$, $D_{33}=Y_3$, $D_{44}=Y_4$,

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ 0 & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{34} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

En el primero ciclo calculamos

$$D_{12}=\frac{D_{22}-D_{11}}{X_2-X_1} \ , \quad D_{23}=\frac{D_{33}-D_{22}}{X_3-X_2} \ , \quad D_{34}=\frac{D_{44}-D_{33}}{X_4-X_3}$$

En el segundo ciclo calculamos $D_{13}=\dfrac{D_{23}-D_{12}}{X_3-X_1}$, $D_{24}=\dfrac{D_{34}-D_{23}}{X_4-X_2}$

En el tercer ciclo calculamos $D_{14}=\dfrac{D_{24}-D_{13}}{X_4-X_1}$.

Entonces en general $\boxed{D_{ij}=\dfrac{D_{i+1,j}-D_{i,j-1}}{X_j-X_i}}$