

Tema 6. Integración numérica

6.1 Definiciones

6.2 Formula del rectángulo

6.3 Formula del trapecio

6.4 Formula de la parábola (Simpson)

6.5 Extrapolación de Richardson para integración

6.6 Método de Romberg

6.7 Método de Montecarlo

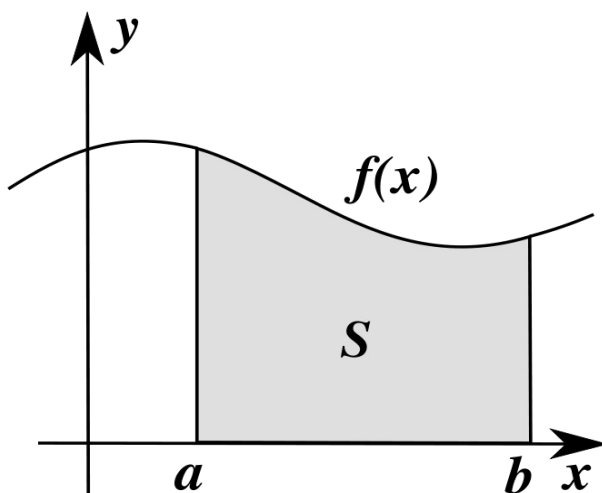
Integración numérica.

La integración numérica se utiliza cuando:

1. la función no se da en forma analítica;

2. la función primitiva (antiderivada) no se expresa en los términos de las funciones analíticas. Por ejemplo, $f(x) = \exp(-x^2)$.

3. Las fórmulas de integración numérica se usarán para construir los métodos de predicción y corrección utilizados en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.



La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es la área bajo la curva $f(x)$ limitada por intervalo $[a, b]$

Integración numérica.

La idea de la integración numérica se basa en sustitución la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

con una suma finita.

$$I_N = \sum_{k=0}^N w_k f(x_k) \quad (2)$$

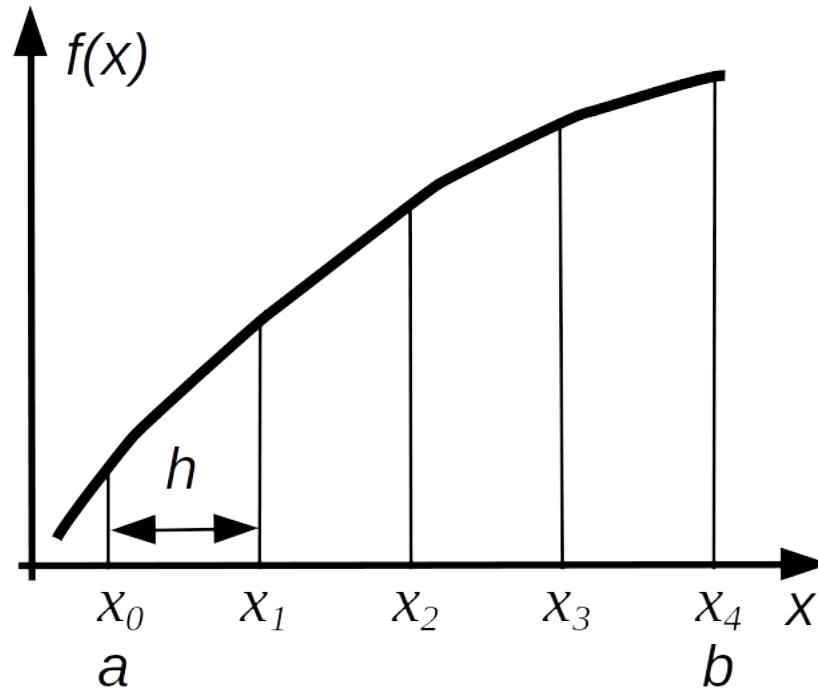
Aproximación $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^N w_k f(x_k)$ se llama la **fórmula de cuadratura**.

Los puntos $\{x_k\}_{k=0}^N$ ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_N = b$) se denominan **los nodos** de la cuadratura, y los coeficientes $\{w_k\}_{k=0}^N$ - son los **pesos** de los nodos.

La diferencia $\psi_N = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^N w_k f(x_k)$ se llama el **error de cuadratura**.

El error **de cuadratura** depende de la ubicación de los nodos, y la elección de los pesos (coeficientes $\{w_k\}_{k=0}^N$).

Integración numérica. Segmentación.



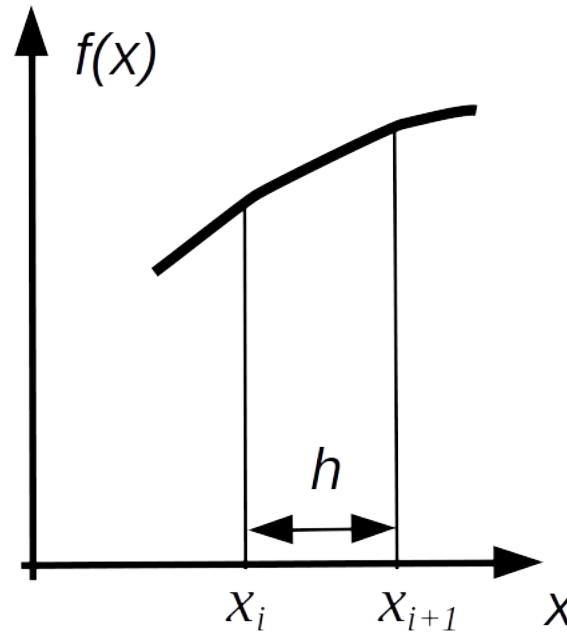
Introducimos en $[a, b]$ una **mallla uniforme con el paso h** , es decir, el conjunto de puntos $\{x_i\} = a + ih; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{b-a}{N}$

y representamos la integral como la suma de los segmentos parciales:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (3)$$

Integración numérica. Segmentación.

Para construir la fórmula de integración numérica en todo el intervalo $[a, b]$ (**formula compuesta**) es suficiente construir una fórmula de cuadratura de la **integral parcial** en intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

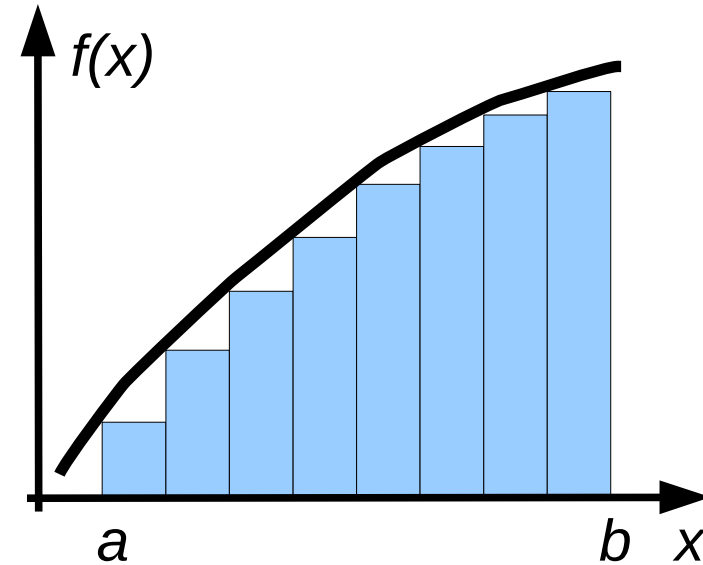
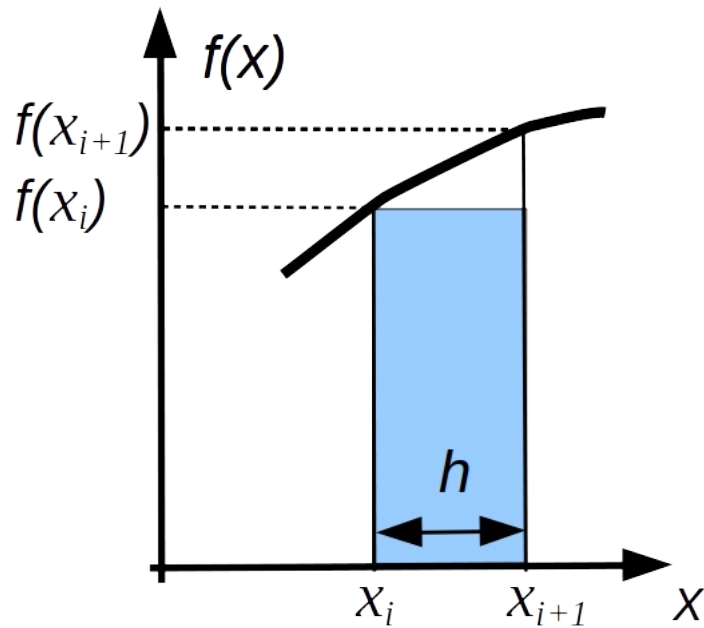


$$I_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (4)$$

y después usar la propiedad (3).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} I_i$$

Formula del rectángulo. Formula del punto izquierda

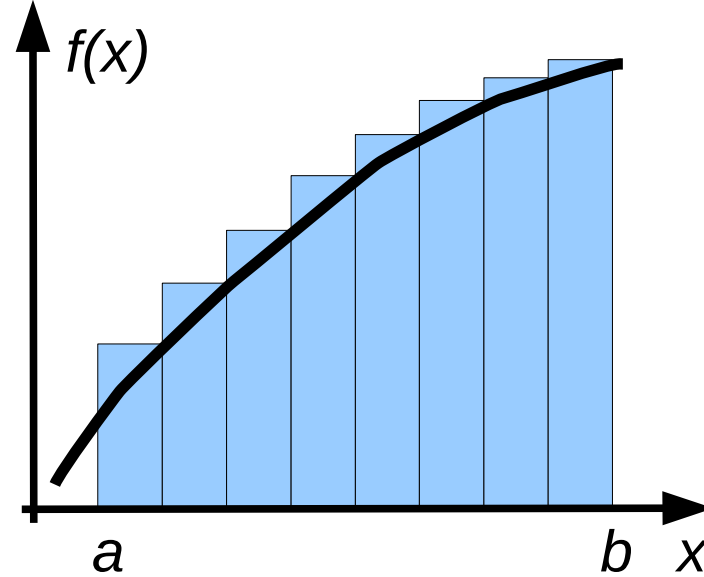
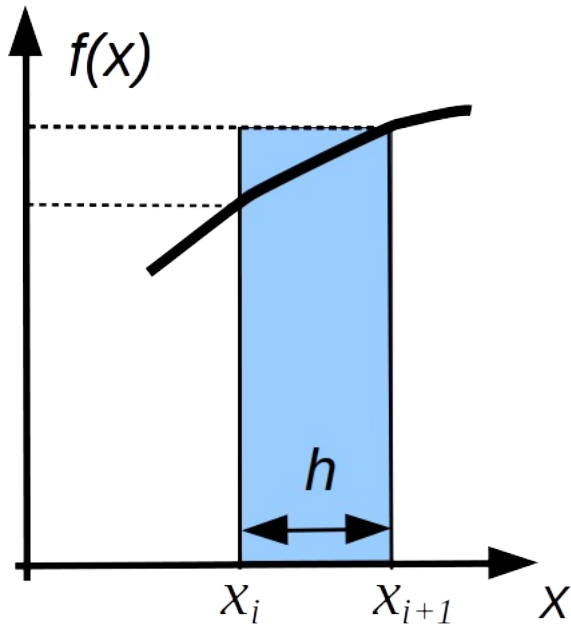


Integral parcial $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx f(x_i) h$, $i=0, \dots, N-1$

Formula compuesta $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$

Orden del error $O(h)$

Formula del rectángulo. Formula del punto derecha

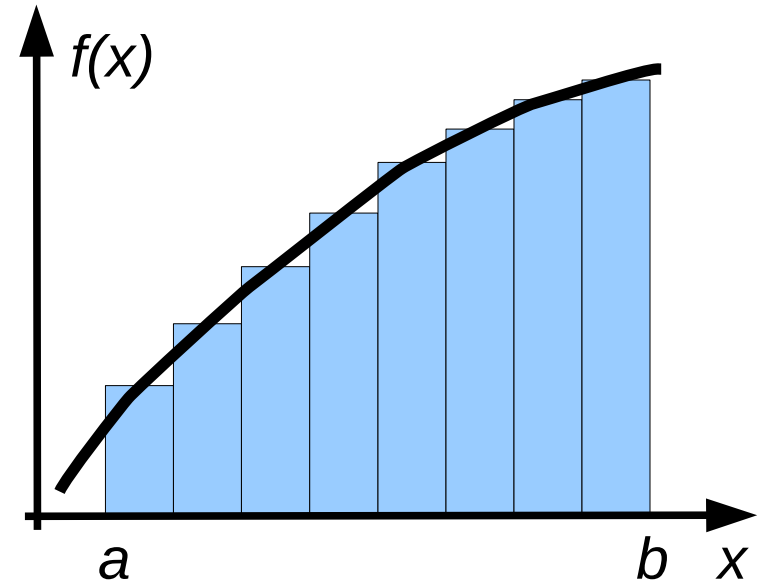
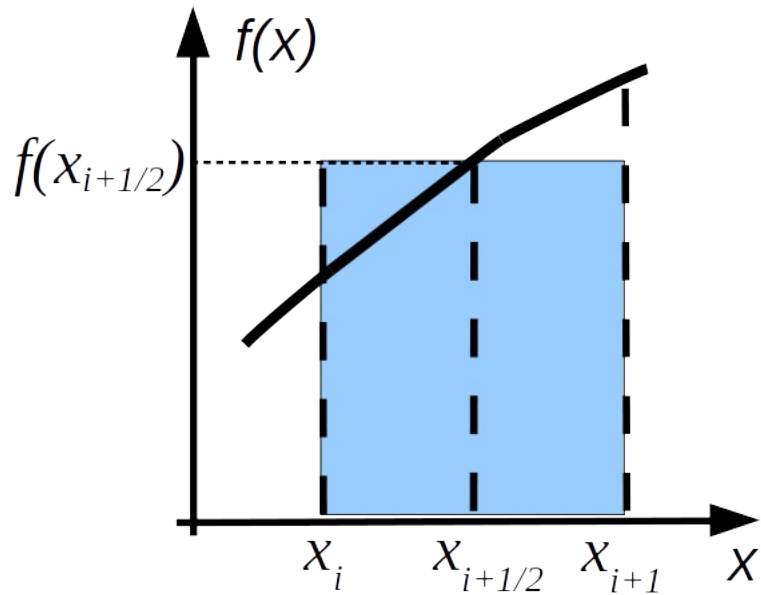


Integral parcial $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx f(x_i) h$, $i=1, \dots, N$

Formula compuesta $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$

Orden del error $O(h)$

Formula del rectángulo. Formula del punto medio

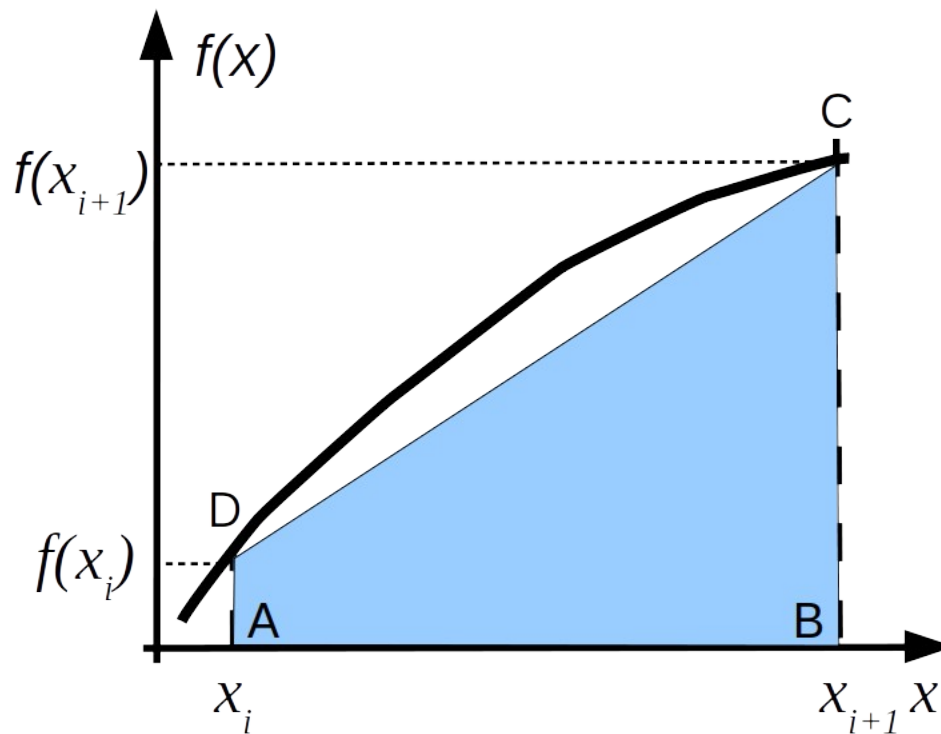


Integral parcial $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx f(x_{i+1/2})h$ donde $x_{i+1/2} = x_i + 0.5h$, $i=0, \dots, N-1$

Formula compuesta $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1/2})$

Orden del error $O(h^2)$

Formula del trapecio.



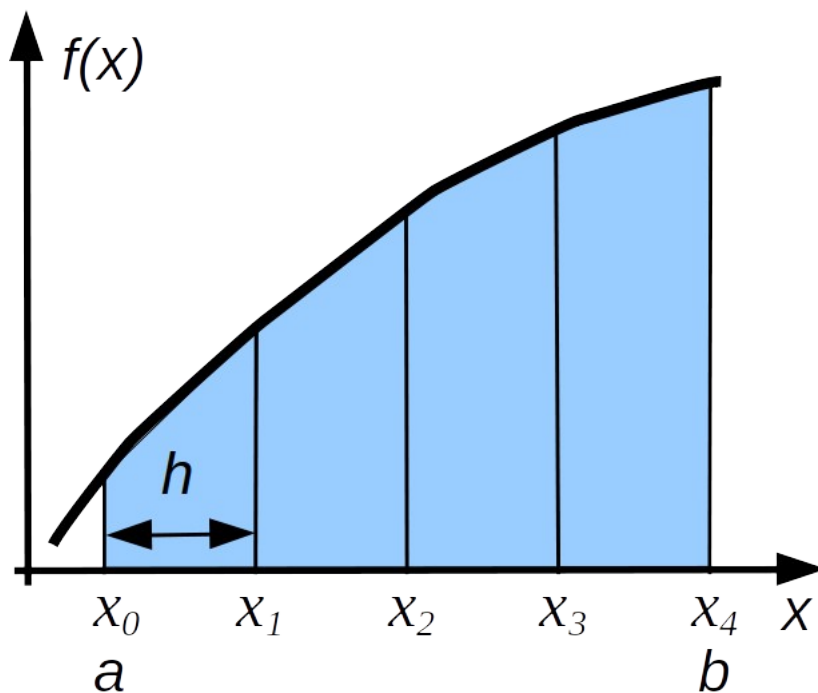
Integral parcial $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \left[\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right] h$

Una formula del trapecio para intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es

Geométricamente, esto es sustitución el área de la figura ABCD por el área del trapecio ABCD.

Formula del trapecio.

Para obtener la formula compuesta aplicamos formula de trapecio a 4 intervalos



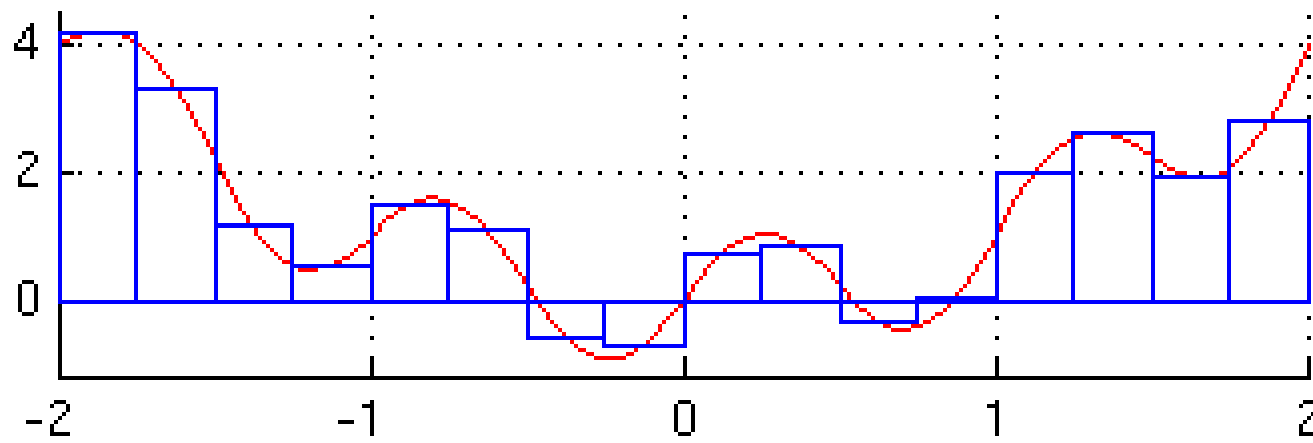
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}h + \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}h$$

Formula compuesta del trapecio

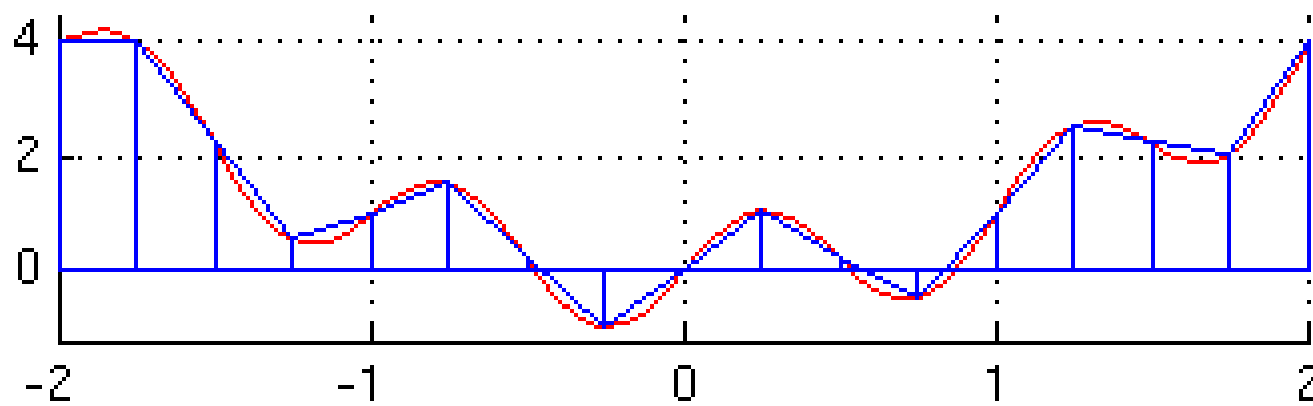
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right]$$

Orden del error $O(h^2)$

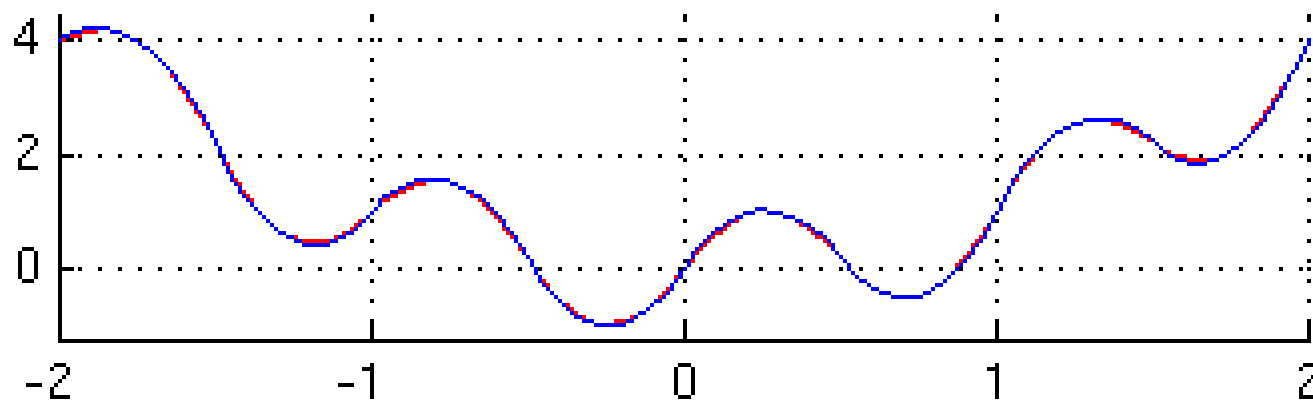
Formula de la parábola (Simpson)



Regla del punto medio.



Regla del trapecio



Regla de Simpson

Formula de la parábola (Simpson)

Para calcular integral parcial $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx$ aproximamos la función $f(x)$ con un polinomio de Lagrange de orden 2 (parábola) que pasa a través de los 3 puntos $(x_j, f(x_j))$, $j=i-1, i, i+1$, es decir, $f(x) \approx L_2(x)$ $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \quad (1)$$

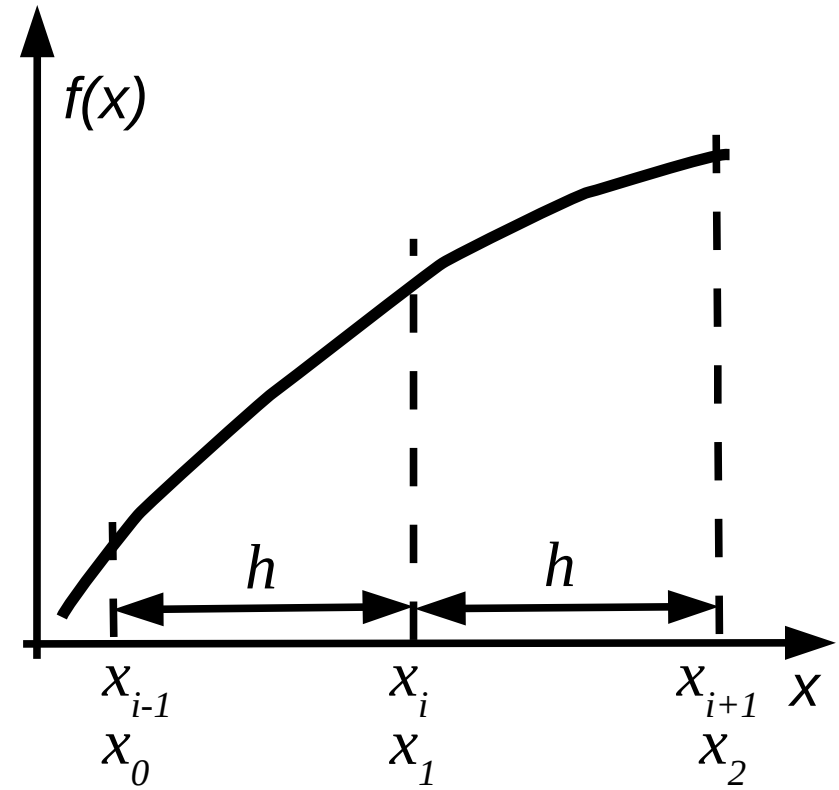
Recuerde que
$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (2)$$

Denotamos $x_2 - x_0 = 2h$, $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$ donde h es paso de la malla

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} \quad (3)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} \quad (4)$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \quad (5)$$



Formula de la parábola (Simpson)

Entonces el polinomio de Lagrange es

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} - y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} \quad (6)$$

Calculamos la integral de polinomio interpolador en $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx = \frac{1}{2h^2} \left[y_0 \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) dx - \right. \\ \left. - 2 y_1 \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2) dx + y_2 \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1) dx \right] \quad (7)$$

Las integrales en la (7) son iguales:

$$\int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) dx = -\frac{(x_2-x_0)^2(x_2-3x_1+2x_0)}{6} = \frac{2h^3}{3} \quad (8)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2) dx = -\frac{(x_2-x_0)^3}{6} = -\frac{4h^3}{3} \quad (9)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1) dx = \frac{(x_2-x_0)^2(2x_2-3x_1+x_0)}{6} = \frac{2h^3}{3} \quad (10)$$

Formula de la parábola (Simpson)

Sustituimos (8), (9) y (10) en (7)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx = \frac{1}{2h^2} \left[y_0 \frac{2h^3}{3} + 2y_1 \frac{4h^3}{3} + y_2 \frac{2h^3}{3} \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

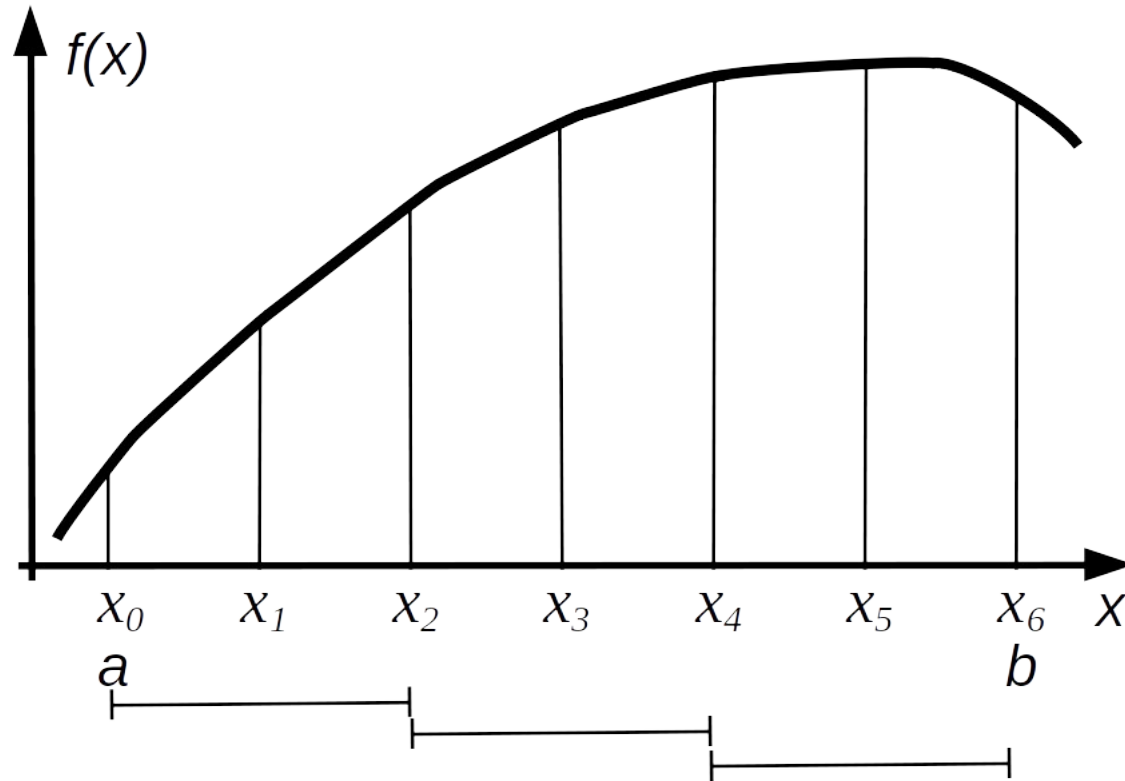
O en denominaciones x_{i-1}, x_i, x_{i+1}

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_{2,i}(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Entonces integral parcial en forma de Simpson

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}]$$

Formula de la parábola (Simpson)



Para la formula compuesta aplicamos formula de Simpson a 3 intervalos

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_2(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3N} \left[y_0 + y_N + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{N-1} y_i + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{N-2} y_i \right] \quad \text{Orden del error } O(h^4)$$

Extrapolación de Richardson para integración.

Se tiene que $I(h)$ es el valor aproximado de la integral $I = \int_a^b f(x) dx$ mediante una división en sub-intervalos $h = \frac{b-a}{n}$ y usando la regla del trapecio.

Entonces $I = I(h) + E(h)$ donde $E(h)$ es el error de truncamiento que se comete al aplicar la regla del trapecio.

El método de extrapolación de Richardson combina dos aproximaciones de integración numérica para obtener un valor más exacto.

Supongamos que tenemos dos aproximaciones $I(h_1)$ e $I(h_2)$ se puede decir que

$$I(h_1) = I(h_2) \Rightarrow I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \quad (1)$$

Y el error que se comete con la regla del trapecio para n sub-intervalos está dado por

$$E(h_1) \approx -\frac{b-a}{12} h_1^2 \bar{f}'' \quad E(h_2) \approx -\frac{b-a}{12} h_2^2 \bar{f}''$$

donde $\bar{f}''$ es un promedio de la segunda derivada

Extrapolación de Richardson para integración.

Ahora, si se supone que el valor de $\bar{f}''$ es constante, entonces:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{\frac{b-a}{12} h_1^2 \bar{f}''}{\frac{b-a}{12} h_2^2 \bar{f}''} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow E(h_1) \approx E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

Sustituyendo esto último en (1)

$$I(h_1) + E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \approx I(h_2) + E(h_2) \Rightarrow I(h_1) - I(h_2) \approx E(h_2) \left(1 - \frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

De aquí:

$$E(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2} \Rightarrow I = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

En el caso especial cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$ se tiene:

$$I \approx I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - 2^2} \Rightarrow I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) \quad (2)$$

Método de Romberg

El método de Romberg se basa en aplicación recursiva de extrapolación del Richardson.

$$R(J,K)=R(J,K-1)+\frac{R(J,K-1)-R(J-1,K-1)}{4^K-1}, \quad 1\leq K\leq J.$$

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i> , 0) Trapezoidal rule	<i>R</i> (<i>J</i> , 1) Simpson's rule	<i>R</i> (<i>J</i> , 2) Boole's rule	<i>R</i> (<i>J</i> , 3) Third improvement	<i>R</i> (<i>J</i> , 4) Fourth improvement
0	<i>R</i> (0, 0)				
1	<i>R</i> (1, 0)	<i>R</i> (1, 1)			
2	<i>R</i> (2, 0)	<i>R</i> (2, 1)	<i>R</i> (2, 2)		
3	<i>R</i> (3, 0)	<i>R</i> (3, 1)	<i>R</i> (3, 2)	<i>R</i> (3, 3)	
4	<i>R</i> (4, 0)	<i>R</i> (4, 1)	<i>R</i> (4, 2)	<i>R</i> (4, 3)	<i>R</i> (4, 4)

El algoritmo se comienza con el calculo de los elementos de columna *R*(*J*,:) usando la regla del trapecio con 2^{*J*} subintervalos en [*a*,*b*] ;

Criterio de terminación es $|R(J,J)-R(J+1,J+1)|<tol$.

Método de Romberg. Ejemplo.

Calculamos con el método del Romberg

$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos(x) dx = -2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 2.038197427067$$

1. Calculamos con el método de trapezio primera columna de la tabla usando los paso $h = \frac{(b-a)}{2^J}$ donde $0 \leq J \leq 5$

J	$R(J, 0)$ Trapezoidal rule	$R(J, 1)$ Simpson's rule	$R(J, 2)$ Boole's rule	$R(J, 3)$ Third improvement
0	0.785398163397			
1	1.726812656758	2.040617487878		
2	1.960534166564	2.038441336499	2.038296259740	
3	2.018793948078	2.038213875249	2.038198711166	2.038197162776
4	2.033347341805	2.038198473047	2.038197446234	2.038197426156
5	2.036984954990	2.038197492719	2.038197427363	2.038197427064

2. Usamos extrapolacion del Richardson para los valores de aproximaciones en los siguientes columnas

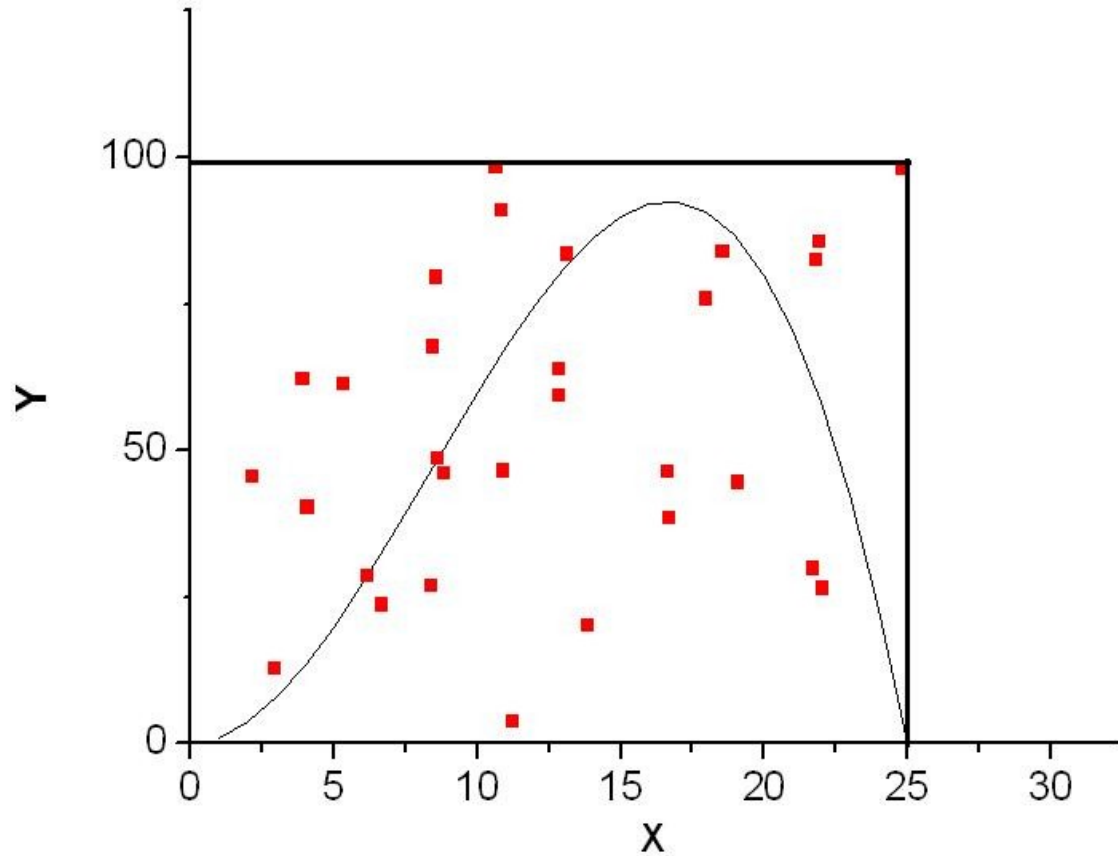
$$R(J, K) = R(J, K-1) + \frac{R(J, K-1) - R(J-1, K-1)}{4^K - 1}, \quad 1 \leq K \leq J$$

Método de Romberg. Ejemplo.

La tabla de los errores de pasos de algoritmo de Romberg.

J	h	$E(J, 0) = \mathcal{O}(h^2)$	$E(J, 1) = \mathcal{O}(h^4)$	$E(J, 2) = \mathcal{O}(h^6)$	$E(J, 3) = \mathcal{O}(h^8)$
0	$b - a$	-1.252799263670			
1	$\frac{b - a}{2}$	-0.311384770309	0.002420060811		
2	$\frac{b - a}{4}$	-0.077663260503	0.000243909432	0.000098832673	
3	$\frac{b - a}{8}$	-0.019403478989	0.000016448182	0.000001284099	-0.000000264291
4	$\frac{b - a}{16}$	-0.004850085262	0.000001045980	0.000000019167	-0.000000000912
5	$\frac{b - a}{32}$	-0.001212472077	0.000000065651	0.000000000296	-0.000000000003

Método de Montecarlo



Para determinar el área bajo la gráfica de la función se puede usar el siguiente algoritmo estocástico:

1. Restringir la función con el rectángulo (paralelepípedo n-dimensional en el caso de problema multidimensional), con área S_{par} ;
2. "Lanzar" en este rectángulo un número de puntos N , cuyas coordenadas serán elegidos al

azar;

3. Definir el número de puntos K , que están bajo de la gráfica de la función;

4. El área bajo de la función está dada por
$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{par} \frac{K}{N}$$

Método de Montecarlo

Ejemplo

Función $y(x) = c_1 + c_2 \sin(x)$, $c_1 = 1.173467$, $c_2 = 3.168362$

Intervalo $a = 0.5$ y $b = 3.5$

Valor de integración analítico

$$S_a = -9.267934$$

Método de Monte Carlo. 1,000

iteraciones $S_{mc} = -9.298608$

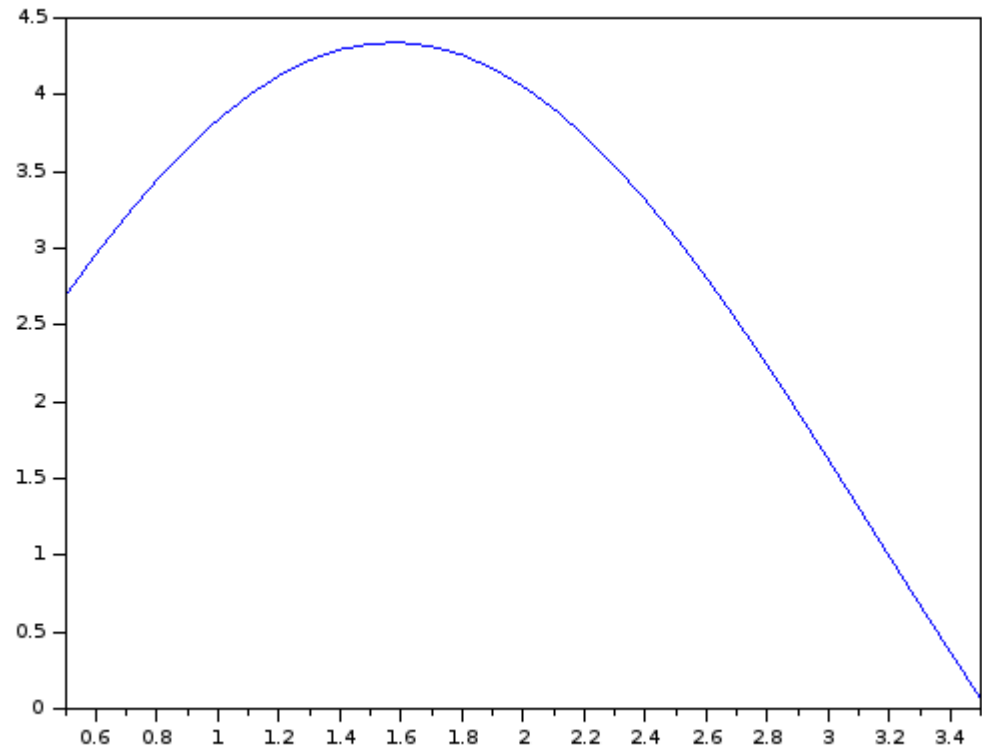
Error relativo $err = 0.003310$

Método de Monte Carlo.

10,000 iteraciones

$S_{mc} = -9.337292$

Error relativo $err = 0.007484$



Funciones de integración de Scilab

int2d — definite 2D integral by quadrature and cubature method

int3d — definite 3D integral by quadrature and cubature method

integrate — integration of an expression by quadrature

intg — definite integral