

Tema 8. Ecuaciones diferenciales ordinarias

8.1 Problema de Valor Inicial

8.1.1 Método de Euler

8.1.2 Método de Heun

8.1.3 Método de series de Taylor

8.1.4 Métodos Runge-Kutta

8.1.5 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

8.1.6 Ecuaciones diferenciales de orden superior

Problema de Valor Inicial

Un **problema de Cauchy** o **problema de valor inicial** o **PVI** consiste en **resolver una ecuación diferencial** sujeta a unas **ciertas condiciones iniciales** sobre la solución cuando una de las variables que la definen (usualmente, la variable temporal), toma un determinado valor (usualmente, $t=0$, para modelar las condiciones del sistema en el instante inicial).

Un problema de **valor inicial de primer orden con condiciones iniciales** esta definido como

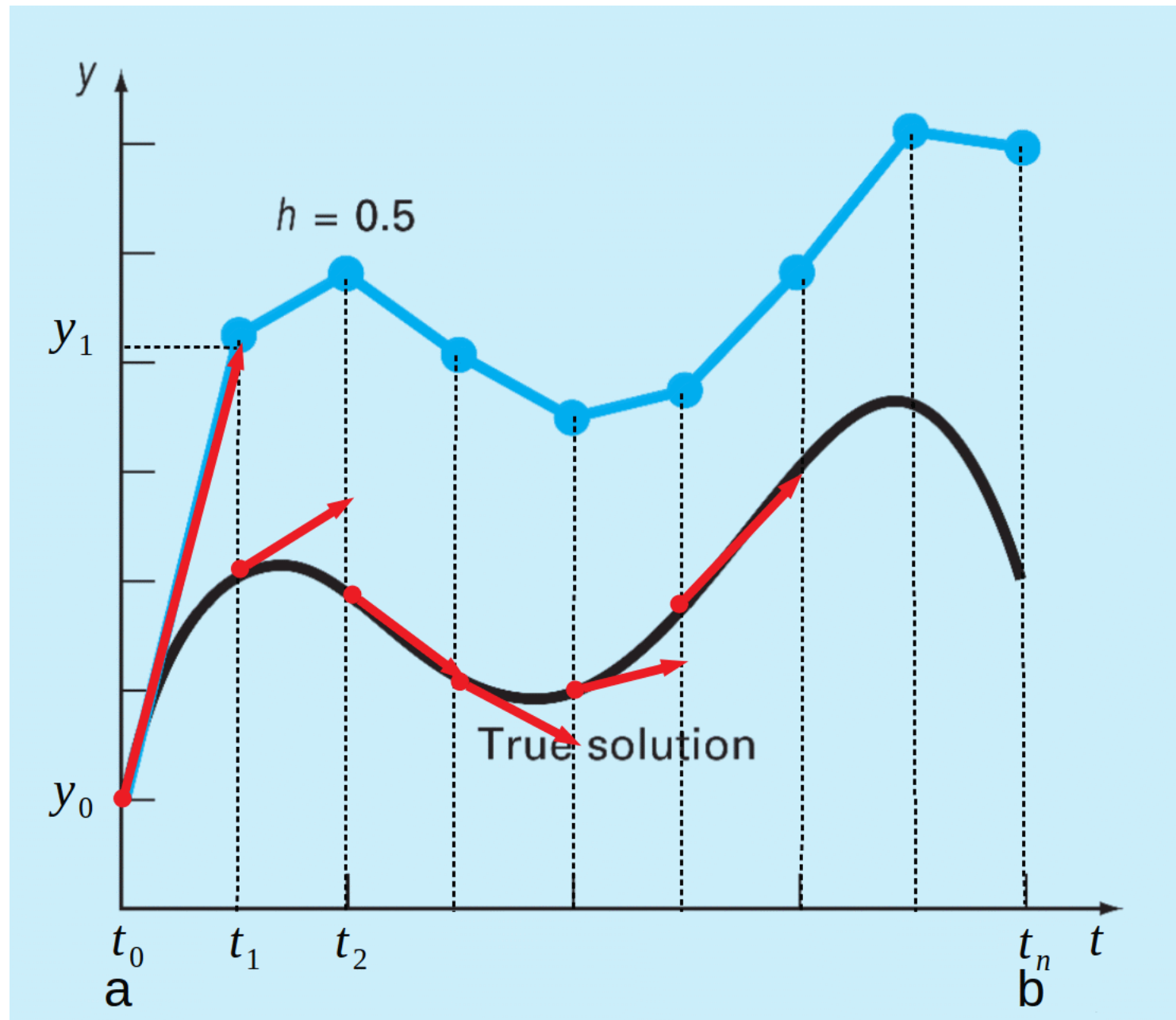
$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

Una solución del problema es una función $y=y(t)$ diferenciable en $[t_0, t_1]$ tal que $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$ para todos $t \in [t_0, t_1]$.

Solución del (1) es $y(t) + C$, donde C es una constante. La condición inicial permite evitar la incertidumbre relacionada con la elección de la constante C .

A diferencia de los métodos analíticos, **no buscamos una función** diferenciable que satisfice las PVI. **Vamos a construir un conjunto de puntos** (t_k, y_k) . Estos puntos son una aproximación $y(t_k) \approx y_k$.

Método de Euler



Método de Euler

Consideremos el intervalo cerrado $[a, b]$ y $P = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ una partición del intervalo con $t_i = t_0 + ih$, siendo $h = \frac{b-a}{n}$ el **tamaño del paso**, y consideremos además la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ en $[a, b]$.

Si $y(t)$, $y'(t)$ y $y''(t)$, son continuas, al aplicar el teorema de Taylor alrededor de t_i en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se tiene que

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(c_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2$$

Como $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$ y $h = t_{i+1} - t_i$ tenemos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \frac{y''(c_i)}{2!}h^2$$

Tomamos solo términos lineales (porque h^2 es pequeño) y recibimos el método de Euler.

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

Nuevo valor = valor antiguo + pendiente $\times$ tamaño de paso

Método de Euler. Ejemplo

Ejemplo. Resolver el problema de Cauchy $y' = \frac{t-y}{2}$, $t \in [0, 3]$, $y(0)=1$ por el método de Euler. Comparamos las soluciones para los pasos $h=1, 0.5, 0.25$. Solución analítica de este equitación es $y(t)=3e^{-t/2}-2+t$.

Con paso $h=1$ tenemos

$$y(0)=1$$

$$y(1)=y(0)+h\frac{t_0-y(0)}{2}=1+1\frac{0-1}{2}=0.5$$

$$y(2)=y(1)+h\frac{t_1-y(1)}{2}=0.5+1\frac{1-0.5}{2}=0.75$$

$$y(3)=y(2)+h\frac{t_2-y(2)}{2}=0.75+1\frac{2-0.75}{2}=1.375$$

Con paso $h=0.5$ tenemos

$$y(0)=1$$

$$y(0.5)=y(0)+h\frac{t_0-y(0)}{2}=1+0.5\frac{0-1}{2}=0.75$$

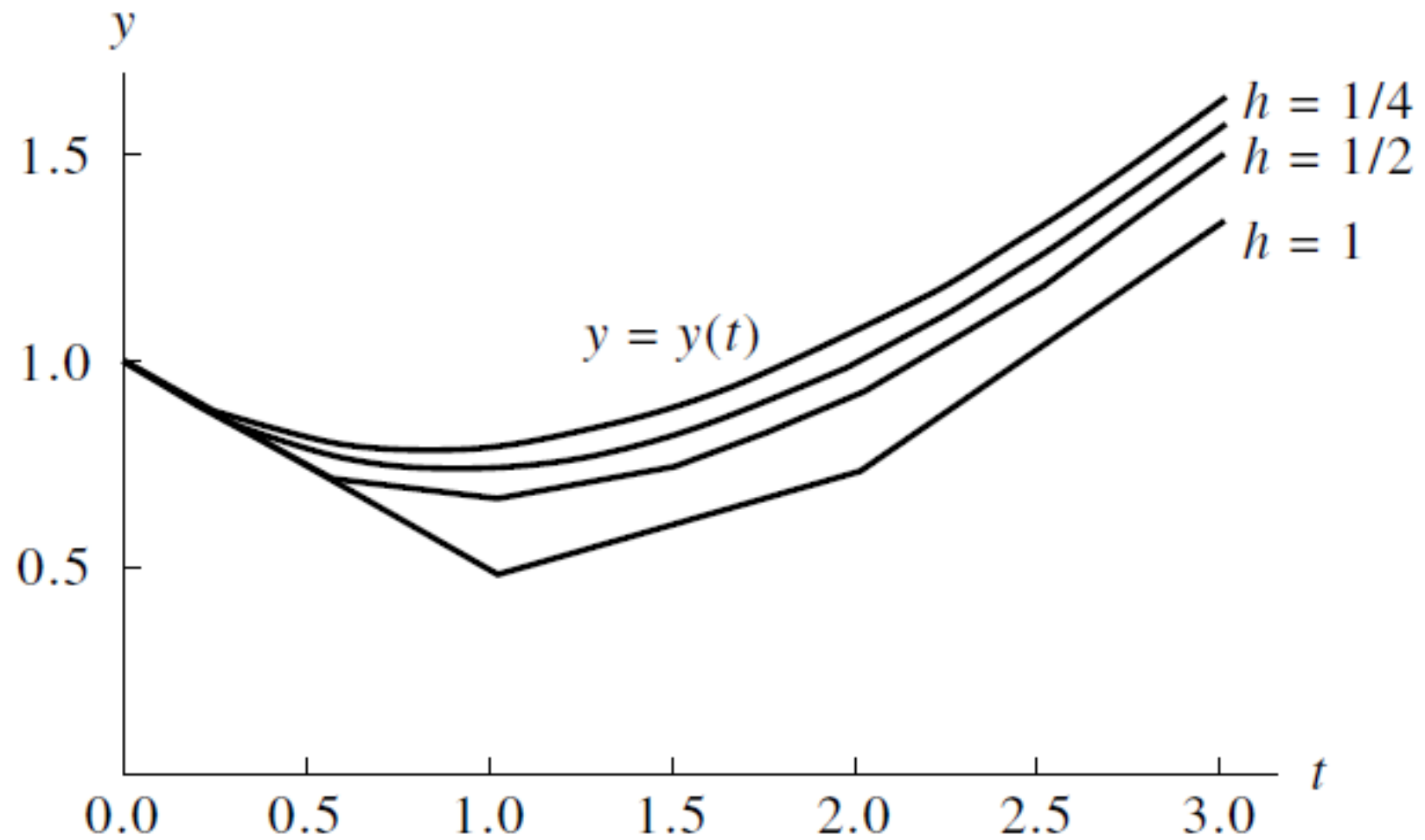
Método de Euler. Ejemplo

$$y(1)=y(0.5)+h\frac{t_1-y(0.5)}{2}=0.75+0.5\frac{0.5-0.75}{2}=0.6875$$

etc.

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9375	0.943239
0.25			0.875	0.886719	0.897491
0.375				0.846924	0.862087
0.50		0.75	0.796875	0.817429	0.836402
0.75			0.759766	0.786802	0.811868
1.00	0.5	0.6875	0.758545	0.790158	0.819592
1.50		0.765625	0.846386	0.882855	0.917100
2.00	0.75	0.949219	1.030827	1.068222	1.103638
2.50		1.211914	1.289227	1.325176	1.359514
3.00	1.375	1.533936	1.604252	1.637429	1.669390

Método de Euler. Ejemplo

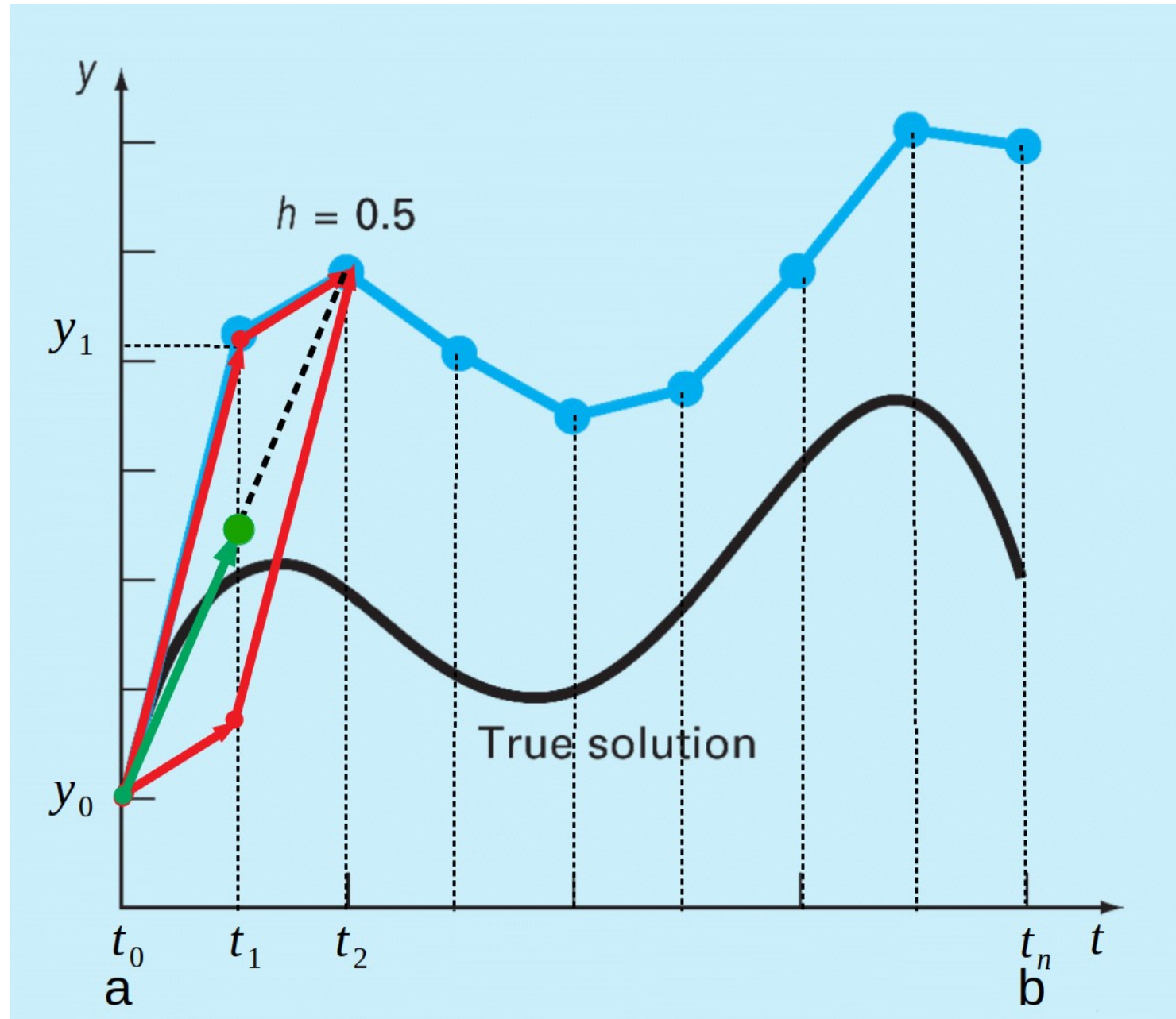


Método de Euler. Ejemplo

Relación entre el tamaño de paso y Error Final Global de solución de Euler.

Step size, h	Number of steps, M	Approximation to $y(3)$, y_M	F.G.E. Error at $t = 3$, $y(3) - y_M$	$O(h) \approx Ch$ where $C = 0.256$
1	3	1.375	0.294390	0.256
$\frac{1}{2}$	6	1.533936	0.135454	0.128
$\frac{1}{4}$	12	1.604252	0.065138	0.064
$\frac{1}{8}$	24	1.637429	0.031961	0.032
$\frac{1}{16}$	48	1.653557	0.015833	0.016
$\frac{1}{32}$	96	1.661510	0.007880	0.008
$\frac{1}{64}$	192	1.665459	0.003931	0.004

Método de Heun



Método de Heun

Como antes tenemos una PVI. $y'(t) = f(t, y(t))$, en $[a, b]$ con $y(t_0) = y_0$.

Para obtener solución en punto (t_1, y_1) podemos usar el **teorema fundamental de calculo**.

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} y'(t) dt = y(t_1) - y(t_0) \Rightarrow y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

Si usamos formula de trapecio para aproximación numérica de integral con el paso $h = t_1 - t_0$ en (3), obtenemos

$$y(t_1) = y(t_0) + \frac{h}{2} [f(t_0, y(t_0)) + f(t_1, y(t_1))] \quad (4)$$

El valor desconocido $y(t_1)$ estimamos con esquema de Euler. Entonces para paso general

Método de Heun tiene dos pasos: predictor-corrector

Predictor: $\tilde{y}(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))$ (es método de Euler)

Corrector: $y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2} [f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, \tilde{y}(t_{i+1}))]$

Método de Heun. Ejemplo

Ejemplo. Resolver el problema de Cauchy $y' = \frac{t-y}{2}$, $t \in [0, 3]$, $y(0)=1$ por el método de Euler modificado. Comparamos las soluciones para los pasos $h=1, 0.5, 0.25$. Solución analítica de este equitación es $y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$.

Con paso $h=1$ tenemos

$$y(0)=1$$

$$\text{predictor: } \tilde{y}(1) = y(0) + h \frac{t_0 - y(0)}{2} = 1 + 1 \frac{0-1}{2} = 0.5$$

$$\text{corrector: } y(1) = y(0) + \frac{h}{2} \left(\frac{t_0 - y(0)}{2} + \frac{t_1 - \tilde{y}(1)}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} (-0.5 + 0.25) = 0.875$$

$$\text{predictor: } \tilde{y}(2) = y(1) + h \frac{t_1 - y(1)}{2} = 0.875 + 1 \frac{1-0.875}{2} = 0.9375$$

corrector

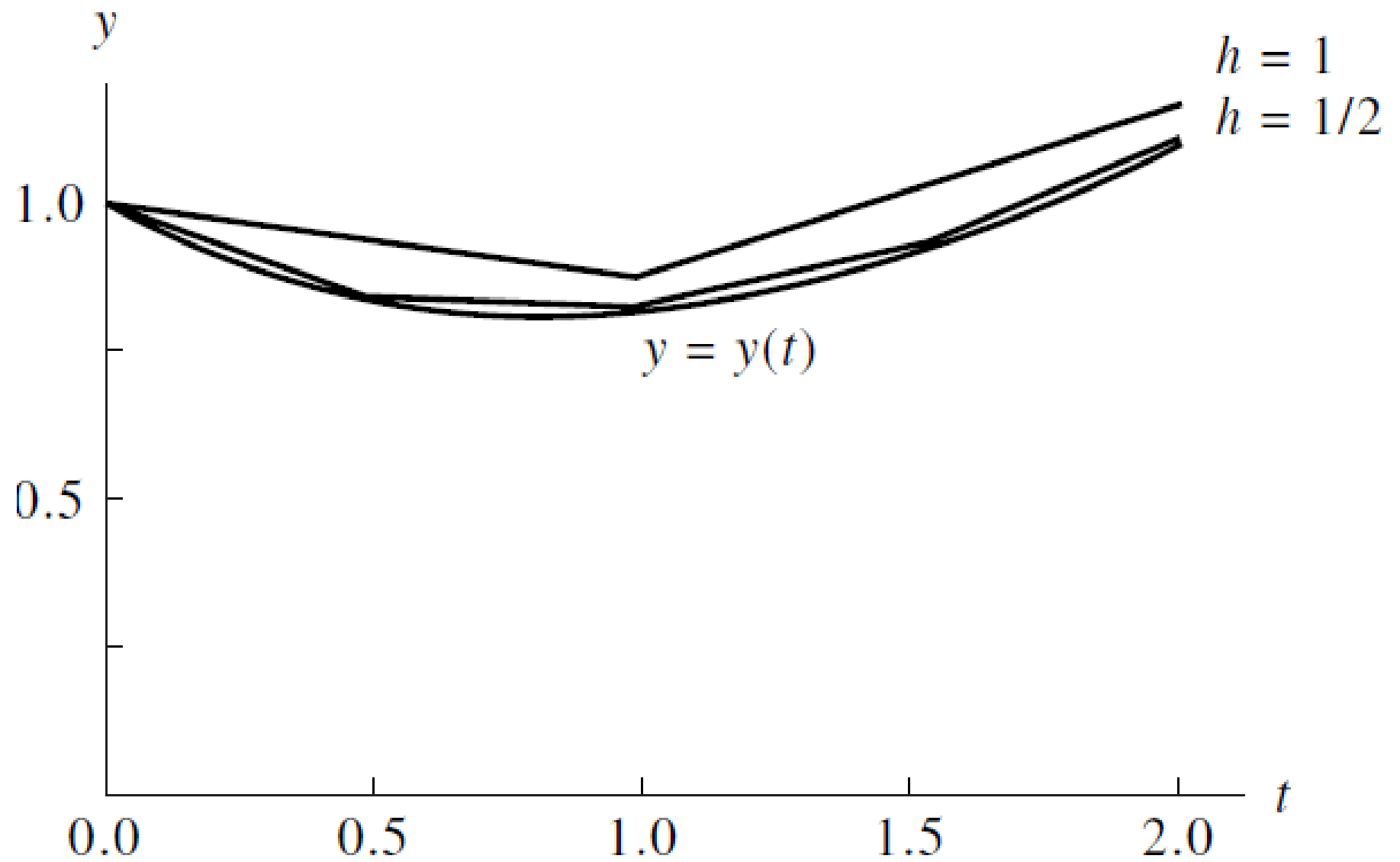
$$y(2) = y(1) + \frac{h}{2} \left(\frac{t_1 - y(1)}{2} + \frac{t_2 - \tilde{y}(2)}{2} \right) = 0.875 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-0.875}{2} + \frac{2-0.9375}{2} \right) = 1.171875$$

Método de Heun. Ejemplo

etc.

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.943359	0.943239
0.25			0.898438	0.897717	0.897491
0.375				0.862406	0.862087
0.50		0.84375	0.838074	0.836801	0.836402
0.75			0.814081	0.812395	0.811868
1.00	0.875	0.831055	0.822196	0.820213	0.819592
1.50		0.930511	0.920143	0.917825	0.917100
2.00	1.171875	1.117587	1.106800	1.104392	1.103638
2.50		1.373115	1.362593	1.360248	1.359514
3.00	1.732422	1.682121	1.672269	1.670076	1.669390

Método de Heun. Ejemplo



Método de Heun. Ejemplo

Relación entre el paso y Error Final Global de soluciones.

Step size, h	Number of steps, M	Approximation to $y(3)$, y_M	F.G.E. Error at $t = 3$, $y(3) - y_M$	$O(h^2) \approx Ch^2$ where $C = -0.0432$
1	3	1.732422	-0.063032	-0.043200
$\frac{1}{2}$	6	1.682121	-0.012731	-0.010800
$\frac{1}{4}$	12	1.672269	-0.002879	-0.002700
$\frac{1}{8}$	24	1.670076	-0.000686	-0.000675
$\frac{1}{16}$	48	1.669558	-0.000168	-0.000169
$\frac{1}{32}$	96	1.669432	-0.000042	-0.000042
$\frac{1}{64}$	192	1.669401	-0.000011	-0.000011

Método de serie de Taylor

Teorema de Taylor. Suponga que $y(t) \in C^{N+1}$, $[t_0, t_M]$ y que $y(t)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor de orden N cerca de la valor fijo $t = t_k \in [t_0, t_M]$:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + y'(t_k)(t_k + h - t_k) + \frac{y''(t_k)}{2!}(t_k + h - t_k)^2 + \frac{y^{(3)}(t_k)}{3!}(t_k + h - t_k)^3 + \dots \\ \dots + \frac{y^{(N)}(t_k)}{N!}(t_k + h - t_k)^N + O(h^{N+1})$$

$$\text{o } y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2 h^2}{2!} + \frac{d_3 h^3}{3!} + \dots + \frac{d_N h^N}{N!} \quad (1)$$

donde $d_j = y^{(j)}(t_k)$ para $j = 1, 2, \dots, N$.

No sabemos $d_j = y^{(j)}(t_k) = f^{(j-1)}(t_k, y(t_k))$ y $y(t)$, pero sabemos $y'(t) = f(t, y(t))$ y podemos calcular las derivadas como .

Derivada total de $f(t, y(t))$ con respecto a t es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{recuerde que } \frac{dy}{dt} = f):$$

Método de serie de Taylor

Las fórmulas para las derivadas de mayor orden se pueden calcular de forma recursiva

$$d_j = P^{(j-1)} f(t, y(t)) \text{ , donde } \mathbf{P \text{ es el operador diferencial } } P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) .$$

Por ejemplo, los primeros derivadas son

$$d_1 = P^{(0)} f(t, y(t)) = f(t, y(t))$$

$$d_2 = P^{(1)} f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$d_3 = P^{(2)} f(t, y(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) d_2 \text{ etc.}$$

La solución numérica aproximada a la P.V.I $y'(t) = f(t, y)$ sobre $[t_0, t_M]$ se obtiene mediante la fórmula (1) en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$.

Método de serie de Taylor. Ejemplo

Resolver el problema de Cauchy $y' = \frac{t-y}{2}$, $t \in [0, 3]$, $y(0) = 1$ por el método de Taylor de orden $N = 4$. Comparar las soluciones para los pasos $h = 1, 0.5, 0.25$. Solución analítica de este equitación es $y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$.

Calculamos las derivadas de $y(t)$. La solución $y(t)$ es una función de t . Diferenciamos la fórmula $y(t) = f(t, y(t))$ con respecto a t para obtener $y^{(2)}(t)$. Luego continuamos con el proceso para obtener los derivados de mayor orden.

$$y'(t) = \frac{t-y}{2},$$

$$y^{(2)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{t-y}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{t-y}{2} \frac{(-1)}{2} = \frac{2-t+y}{4},$$

$$y^{(3)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{2-t+y}{4} \right) = \frac{-1}{4} + \left(\frac{t-y}{2} \right) \frac{1}{4} = \frac{-2+t-y}{8},$$

$$y^{(4)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{-2+t-y}{8} \right) = \frac{1}{8} + \left(\frac{t-y}{2} \right) \frac{(-1)}{8} = \frac{2-t+y}{16}.$$

Método de serie de Taylor. Ejemplo

Para encontrar y_1 , las derivadas dadas anteriormente deben ser evaluadas en el punto $(t_0, y_0) = (0, 1)$.

$$d_1 = y'(0) = \frac{0-1}{2} = -0.5 ,$$

$$d_2 = y^{(2)}(0) = \frac{2-0+1}{4} = 0.75 ,$$

$$d_3 = y^{(3)}(0) = \frac{-2+0-1}{8} = -0.375 ,$$

$$d_4 = y^{(4)}(0) = \frac{2-0+1}{16} = 0.1875 .$$

A continuación, las derivadas $\{d_j\}$ se sustituyen en (1) con $h=0.25$, y la multiplicación anidada se utiliza para calcular el valor y_1 :

$$y_1 = 1.0 + 0.25 \left(-0.5 + 0.25 \left(\frac{0.75}{2} + 0.25 \left(\frac{-0.375}{6} + 0.25 \left(\frac{0.1875}{24} \right) \right) \right) \right) = 0.8974915 .$$

El punto de la solución calculada es $(t_1, y_1) = (0.25, 0.8974915)$.

Método de serie de Taylor. Ejemplo

Para determinar y_2 , las derivadas $\{d_j\}$ ahora debe ser evaluado en el punto $(t_1, y_1) = (0.25, 0.8974915)$.

$$d_1 = y'(0.25) = \frac{0.25 - 0.8974915}{2} = -0.3237458,$$

$$d_2 = y^{(2)}(0.25) = \frac{2.0 - 0.25 + 0.8974915}{4} = 0.6618729,$$

$$d_3 = y^{(3)}(0.25) = \frac{-2.0 + 0.25 - 0.8974915}{8} = -0.3309364,$$

$$d_4 = y^{(4)}(0.25) = \frac{2.0 - 0.25 + 0.8974915}{16} = 0.1654682.$$

Ahora estos derivados $\{d_j\}$ se sustituyen en (2) con $h=0.25$, y la multiplicación anidada se utiliza para calcular el valor de y_2 :

$$y_2 = 0.8974915 + \\ + 0.25 \left(-0.3237458 + 0.25 \left(\frac{0.6618729}{2} + 0.25 \left(\frac{-0.3309364}{6} + 0.25 \left(\frac{0.1654682}{24} \right) \right) \right) \right) =$$

$= 0.8364037$. La solución está en punto $(t_2, y_2) = (0.50, 0.8364037)$.

Método de serie de Taylor. Ejemplo

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.8364037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		0.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

Método de serie de Taylor. Ejemplo

Relación entre el tamaño de paso y Error Final Global de soluciones de Taylor de orden 4. Error en los métodos de Taylor es de orden $\mathcal{O}(h^N)$

Step size, h	Number of steps, M	Approximation to $y(3)$, y_M	F.G.E. Error at $t = 3$, $y(3) - y_M$	$\mathcal{O}(h^2) \approx Ch^4$ where $C = -0.000614$
1	3	1.6701860	-0.0007955	-0.0006140
$\frac{1}{2}$	6	1.6694308	-0.0000403	-0.0000384
$\frac{1}{4}$	12	1.6693928	-0.0000023	-0.0000024
$\frac{1}{8}$	24	1.6693906	-0.0000001	-0.0000001

Métodos de Runge-Kutta

Cada uno método de Runge-Kutta se deriva de un adecuado método de Taylor de tal manera que la error total es de orden $O(h^N)$. **Para eliminar la necesidad de calcular las derivadas superiores se haga varias evaluaciones de función en cada paso.** Estos métodos se pueden construir para cualquier orden N .

Consideramos la derivación de las fórmulas de los **métodos de Runge-Kutta con el ejemplo de segundo orden.**

Queremos obtener las formulas para solución de la problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad y(0) = y_0 \quad (1)$$

con un método de segundo orden sin calculo de las derivadas.

Buscamos la formula en forma

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 h + a_2 k_2 h \quad (2)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (3)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h), \quad (4)$$

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

y tamaño del paso $h = x_{i+1} - x_i$.

1. Serie de Taylor de función $y(x)$ en el punto x_{i+1} es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i, y_i} h + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_i, y_i} h^2 + O(h^3) \quad \text{or}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2!} f'(x_i, y_i)h^2 + O(h^3) \quad (5)$$

Ya que $f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$ o

$$f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) \quad (6)$$

la serie de Taylor es ((6)->(5))

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i)h^2 + O(h^3) \quad (7)$$

2. Obtenemos la serie de Taylor de función de (4) $k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Los primeros tres términos de la serie de Taylor de función $f(x+a, y+b)$ son

$$f(x+a, y+b) = f(x, y) + a \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x,y} + b \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x,y} + O(a^2, b^2) \quad (8)$$

Entonces usando (8) tenemos

$$k_2 = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} + O(h^2) \quad (9)$$

Si sustituimos (9) en (2) tenemos

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 h + a_2 k_2 h =$$
$$y_i + a_1 f(x_i, y_i) h + a_2 f(x_i, y_i) h + a_2 p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + a_2 q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} h + O(h^3) \quad (10)$$

O con (3)

$$y_{i+1} = y_i + a_1 f(x_i, y_i) h + a_2 f(x_i, y_i) h + a_2 p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h +$$
$$+ a_2 q_{11} h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h + O(h^3) \quad (11)$$

Si nosotros comparamos (7) y (11)

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

$$f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h^2 =$$
$$a_1 f(x_i, y_i)h + a_2 f(x_i, y_i)h + a_2 p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + a_2 q_{11} h \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h \quad (12)$$

y después dividimos por h ambas partes de (12), tenemos

$$f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h =$$
$$a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i) + a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + a_2 q_{11} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h \quad \text{o}$$
$$f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h =$$
$$f(x_i, y_i)(a_1 + a_2) + a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i, y_i} h + a_2 q_{11} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_i, y_i} f(x_i, y_i) h .$$

Comparamos los mismos términos y al fin tenemos

$$a_1 + a_2 = 1 , \quad a_2 p_1 = \frac{1}{2} , \quad a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \quad (13)$$

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Tenemos sólo tres ecuaciones para las cuatro incógnitas, por esto **existen diferentes fórmulas** finales para el método de Runge-Kutta de segundo orden

Formula de Heun

Suponemos que $a_2 = \frac{1}{2}$. Entonces de (13) $a_1 = \frac{1}{2}$, $p_1 = 1$ y $q_{11} = 1$.

Ahora podemos escribir (2) como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Comparamos con

Predictor: $\tilde{y}(t_{i+1}) = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))$

Corrector: $y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2} [f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, \tilde{y}(t_{i+1}))]$

Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)

Entre todos los métodos de Runge-Kutta el método de orden $N=4$ es el más popular.

El método de Runge-Kutta de orden cuarto (**RK4**) se basa en un cálculo y_k como sigue:

Comience con el punto inicial (t_0, y_0) y genera la secuencia de aproximaciones utilizando

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6}, \text{ donde}$$

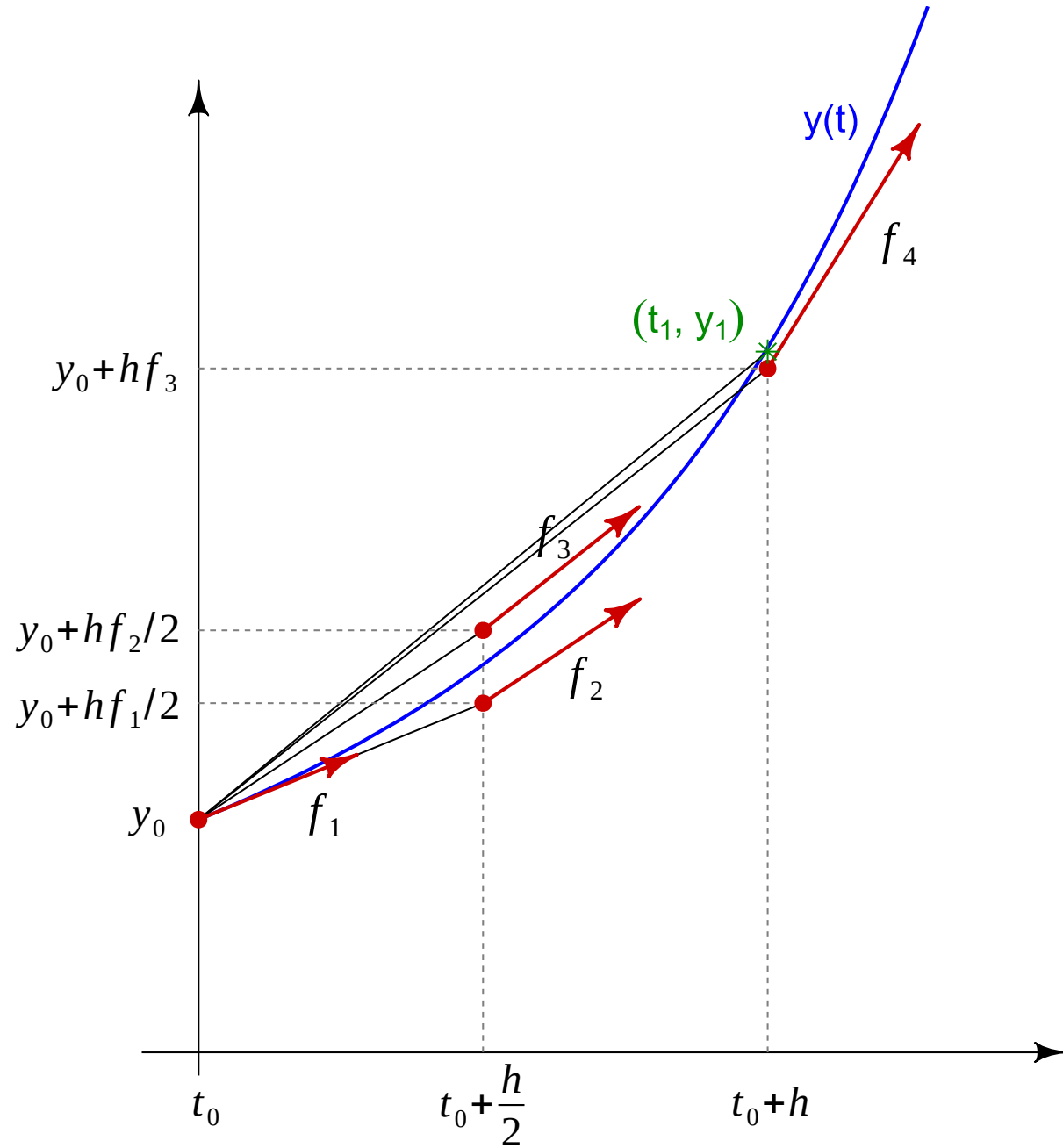
$$f_1 = f(t_k, y_k),$$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_1\right),$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_2\right),$$

$$f_4 = f(t_k + h, y_k + hf_3).$$

Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)



Métodos de Runge-Kutta. Ejemplo

Utilice el método RK4 para resolver P.V.I. $y' = \frac{t-y}{2}$, $t \in [0, 3]$, $y(0) = 1$.

Compara las soluciones para $h = 1, 0.5, 0.25$. Solución analítica de esta ecuación es $y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$.

Por el tamaño de paso $h = 1$

$$f_1 = f(t_0, y_0) = \frac{t_0 - y_0}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -0.5,$$

$$f_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_1\right) = f(0.5, 0.75) = \frac{(0 + 0.5) - (1 + 0.5 \cdot (-0.5))}{2} = -0.125,$$

$$f_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f_2\right) = \frac{(0 + 0.5) - (1 + 0.5 \cdot (-0.125))}{2} = -0.21875,$$

$$f_4 = f(t_0 + h, y_0 + hf_3) = \frac{(0 + 1) - (1 + 1 \cdot (-0.21875))}{2} = 0.109375,$$

$$y_1 = 1 + 1 \left(\frac{-0.5 + 2(-0.125) + 2(-0.21875) + 0.109375}{6} \right) = 0.820312.$$

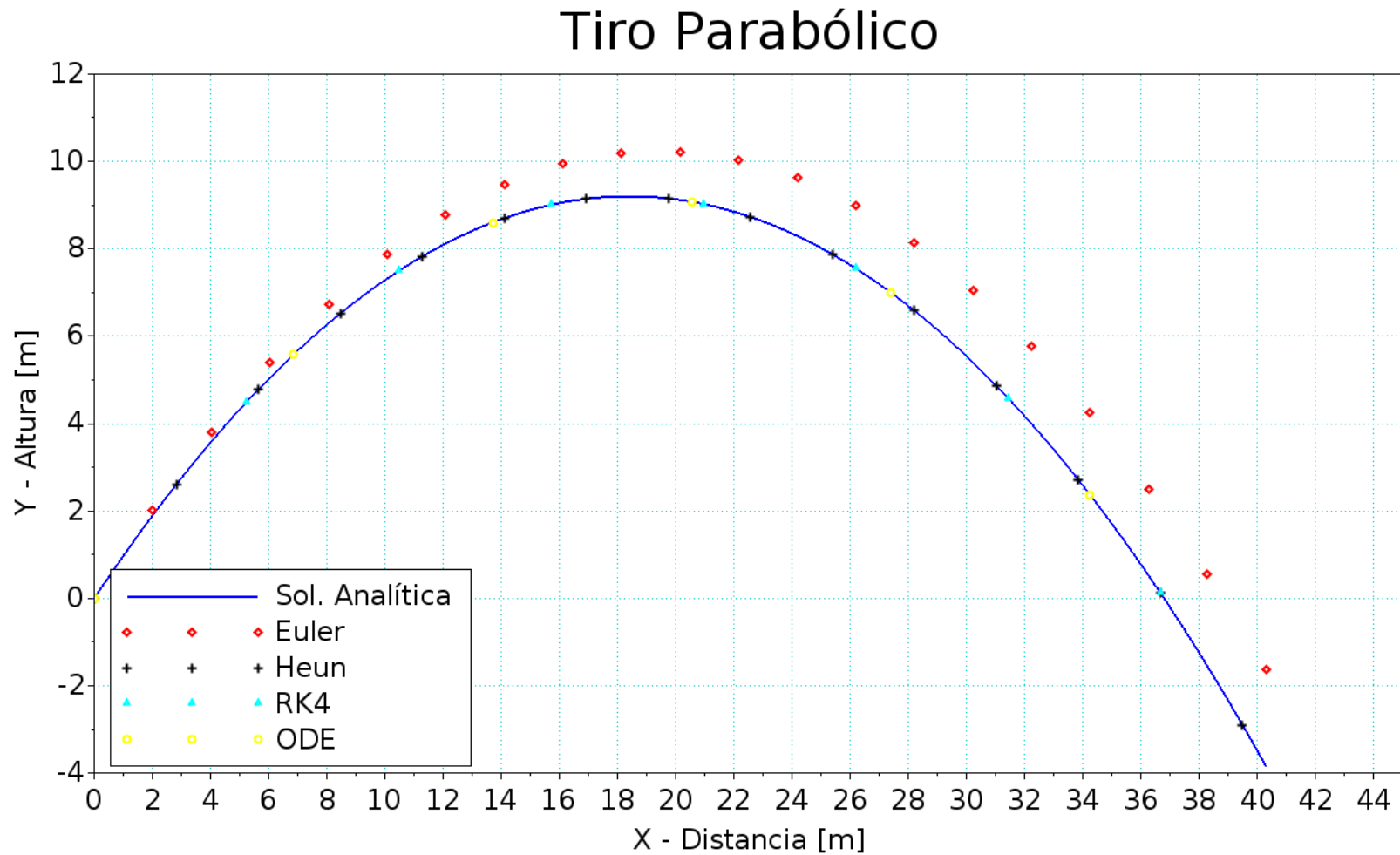
Métodos de Runge-Kutta. Ejemplo

t_k	y_k				$y(t_k)$ Exact
	$h = 1$	$h = \frac{1}{2}$	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.125				0.9432392	0.9432392
0.25			0.8974915	0.8974908	0.8974917
0.375				0.8620874	0.8620874
0.50		0.8364258	0.8364037	0.8364024	0.8364023
0.75			0.8118696	0.8118679	0.8118678
1.00	0.8203125	0.8196285	0.8195940	0.8195921	0.8195920
1.50		0.9171423	0.9171021	0.9170998	0.9170997
2.00	1.1045125	1.1036826	1.1036408	1.1036385	1.1036383
2.50		1.3595575	1.3595168	1.3595145	1.3595144
3.00	1.6701860	1.6694308	1.6693928	1.6693906	1.6693905

Métodos de Runge-Kutta. Ejemplo

Step size, h	Number of steps, M	Approximation to $y(3)$, y_M	F.G.E. Error at $t = 3$, $y(3) - y_M$	$O(h^4) \approx Ch^4$ where $C = -0.000614$
1	3	1.6701860	-0.0007955	-0.0006140
$\frac{1}{2}$	6	1.6694308	-0.0000403	-0.0000384
$\frac{1}{4}$	12	1.6693928	-0.0000023	-0.0000024
$\frac{1}{8}$	24	1.6693906	-0.0000001	-0.0000001

Comparacion de los métodos



Método de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)

Una forma de garantizar la exactitud en la solución de un P.V.I. es **resolver el problema dos veces** con el tamaños de paso h y $h/2$ y **comparar** las respuestas en los puntos de la malla que correspondan al paso más grande. Pero esto requiere una cantidad significativa de cálculo para el tamaño de paso más pequeño y se debe repetir si se determina que el paso no es suficiente.

El método de Runge-Kutta-Fehlberg (denotado RKF45) es una forma de intentar resolver este problema. Este método tiene un procedimiento para determinar si el tamaño de paso h es adecuado. En cada paso, dos aproximaciones diferentes para la solución se hacen y se comparan. Si las dos soluciones son de acuerdo, la aproximación es aceptada. Si las dos respuestas no está de acuerdo con una exactitud, **el tamaño del paso se reduce**. Si las respuestas son de acuerdo a más dígitos significativos de lo requerido, **el tamaño del paso se incrementa**.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases}$$

con $x(t_0) = x_0$, y $y(t_0) = y_0$.

Una solución de este sistema es un par de funciones diferenciables $x(t)$ y $y(t)$ con la propiedad que

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t))$$

$$y'(t) = g(t, x(t), y(t))$$

con $x(t_0) = x_0$, y $y(t_0) = y_0$.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Solución numérica

Una solución numérica del sistema en el intervalo $a \leq t \leq b$ se encuentra considerando las diferenciales

$$dx = f(t, x, y)dt \quad \text{y} \quad dy = g(t, x, y)dt \quad (1).$$

El método de Euler para resolver el sistema. Las diferenciales $dt = t_{k+1} - t_k$, $dx = x_{k+1} - x_k$, y $dy = y_{k+1} - y_k$ se sustituyen en (1) para obtener

$$x_{k+1} - x_k \approx f(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k), \quad (2)$$

$$y_{k+1} - y_k \approx g(t_k, x_k, y_k)(t_{k+1} - t_k).$$

El intervalo se divide en M subintervalos de ancho $h = (b - a) / M$, y los puntos de la malla son $t_{k+1} = t_k + h$. Esto se utiliza en (2) para obtener las fórmulas recursivas para el método de Euler:

$$t_{k+1} = t_k + h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + h g(t_k, x_k, y_k) \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Un método de orden superior se debe utilizar para conseguir una razonable cantidad de exactitud.

Por ejemplo, el de Runge-Kutta de orden 4 fórmulas son

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6} \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)}{6}$$

donde

$$f_1 = f(t_k, x_k, y_k) ,$$

$$g_1 = g(t_k, x_k, y_k)$$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1\right) ,$$

$$g_2 = g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_1, y_k + \frac{h}{2} g_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2\right) ,$$

$$g_3 = g\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_2, y_k + \frac{h}{2} g_2\right)$$

$$f_4 = f(t_k + h, x_k + h f_3, y_k + h g_3)$$

$$g_4 = g(t_k + h, x_k + h f_3, y_k + h g_3)$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Ejemplo

Con el método de Runge-Kutta de orden 4 calcula el valor de P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$$

con $x(t_0)=6$, y $y(t_0)=4$ en intervalo $[0.0,0.2]$ con 10 subintervalos y el tamaño de paso $h=0.02$.

Para el primer punto tenemos $t_1=0.02$, y los cálculos intermedios necesarios para calcular x_1 y y_1 son

$$f_1 = f(0.00, 6.0, 4.0) = 14.0$$

$$g_1 = g(0.00, 6.0, 4.0) = 26.0$$

$$x_0 + \frac{h}{2} f_1 = 6.14$$

$$y_0 + \frac{h}{2} g_1 = 4.26$$

$$f_2 = f(0.01, 6.14, 4.26) = 14.66$$

$$g_2 = g(0.01, 6.14, 4.26) = 26.94$$

$$x_0 + \frac{h}{2} f_2 = 6.1466$$

$$y_0 + \frac{h}{2} g_2 = 4.2694$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Ejemplo

$$f_3 = f(0.01, 6.1466, 4.2694) = 14.6854$$

$$g_3 = f(0.01, 6.1466, 4.2694) = 26.9786$$

$$x_0 + h f_3 = 6.293708$$

$$y_0 + h g_3 = 4.539572$$

$$f_4 = f(0.02, 6.293708, 4.539572) = 15.372852$$

$$g_4 = f(0.02, 6.293708, 4.539572) = 27.960268 .$$

Estos valores se utilizan en el cálculo final:

$$x_1 = 6 + \frac{0.02}{6} (14.0 + 2(14.66) + 2(14.6854) + 15.372852) = 6.29354551 ,$$

$$y_1 = 4 + \frac{0.02}{6} (26.0 + 2(26.94) + 2(26.9786) + 27.960268) = 4.53932490 .$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales. Ejemplo

Soluciones de Runge-Kutta de $x'(t)=x+2y$, $y'(t)=3x+2y$ con los valores iniciales $x(0)=6$ e $y(0)=4$

k	t_k	x_k	y_k
0	0.00	6.000000000	4.000000000
1	0.02	6.29354551	4.53932490
2	0.04	6.61562213	5.11948599
3	0.06	6.96852528	5.74396525
4	0.08	7.35474319	6.41653305
5	0.10	7.77697287	7.14127221
6	0.12	8.23813750	7.92260406
7	0.14	8.74140523	8.76531667
8	0.16	9.29020955	9.67459538
9	0.18	9.88827138	10.6560560
10	0.20	10.5396230	11.7157807

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Ecuaciones diferenciales de orden superior implican las derivadas de mayor orden $x''(t)$, $x'''(t)$, y así sucesivamente. Surgen en los modelos matemáticos de problemas de física e ingeniería. Por ejemplo,

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = r(t)$$

representa un sistema mecánico en el que un resorte con constante k restaura una masa desplazada m . Amortiguación es proporcional a la velocidad $x'(t)$, y la función $r(t)$ es una fuerza externa. Usualmente la posición $x(t_0)$ y la velocidad $x'(t_0)$ son conocidos en un momento determinado t_0 .

Podemos escribir un segundo orden P.V.I. en la forma

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)) \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{y} \quad x'(t_0) = y_0. \quad (1)$$

La ecuación diferencial de segundo orden puede ser reformulada como un sistema de dos ecuaciones de primer orden si se utiliza la sustitución

$$x'(t) = y(t).$$

Entonces $x''(t) = y'(t)$ y la ecuación diferencial en (1) se convierte en un sistema:

Ecuaciones diferenciales de orden superior

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y(t) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases} \quad (2)$$

con $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$.

Un procedimiento numérico como el método de Runge-Kutta se puede utilizar para resolver (2) y va a generar dos secuencias (x_k) y (y_k) . La primera secuencia es la solución numérica de (1)

Ejemplo.

Consideramos el problema de segundo orden de valor inicial

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0 \quad \text{con} \quad x(0) = 3 \quad \text{y} \quad x'(0) = -5.$$

(a) Escribe el sistema equivalente de dos ecuaciones de primer orden.

(b) Utilice el método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver el problema en un intervalo $[0, 5]$ con $M = 50$ subintervalos con el paso $h = 0.1$.

(c) Compara la solución numérica con solución analítica.

Ecuaciones diferenciales de orden superior. Ejemplo

Solución analítica es

$$x(t) = 3e^{-2t} \cos(t) + e^{-2t} \sin(t) .$$

(a) La ecuación diferencial tiene la forma

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)) = -4x'(t) - 5x(t)$$

(b) Uso de la sustitución $x'(t) = y(t)$, tenemos el problema reformulado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 4y \end{cases}$$

con $x(0) = 3$ y $y(0) = -5$.

Ve el ejemplo [Tema08.ODE.IVP.Ord2.RK4.sce](#)

Ecuaciones diferenciales de orden superior. Ejemplo

k	t_k	x_k	$x(t_k)$
0	0.0	3.000000000	3.000000000
1	0.1	2.52564583	2.52565822
2	0.2	2.10402783	2.10404686
3	0.3	1.73506269	1.73508427
4	0.4	1.41653369	1.41655509
5	0.5	1.14488509	1.14490455
10	1.0	0.33324302	0.33324661
20	2.0	−0.00620684	−0.00621162
30	3.0	−0.00701079	−0.00701204
40	4.0	−0.00091163	−0.00091170
48	4.8	−0.00004972	−0.00004969
49	4.9	−0.00002348	−0.00002345
50	5.0	−0.00000493	−0.00000490

Preguntas de autoevaluación

- 1 Formulación de Problema de Valor Inicial
- 2 Método de Euler
- 3 Método de Euler modificado
- 4 Método de series de Taylor
- 5 Métodos Runge-Kutta
- 6 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
- 7 Ecuaciones diferenciales de orden superior