Análisis Numérico

Tema 8. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Problema de valor de frontera

Un problema de valor de frontera o contorno se lo denomina al **conjunto de una ecuación diferencial y a las condiciones de frontera** o contorno. Una **solución** de un problema de condiciones de frontera es una **solución de una ecuación diferencial que también satisface condiciones de frontera**.

Un problema de valores en la frontera puede tener siguiente forma

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \ , \qquad (1)$$

con condiciones de frontera

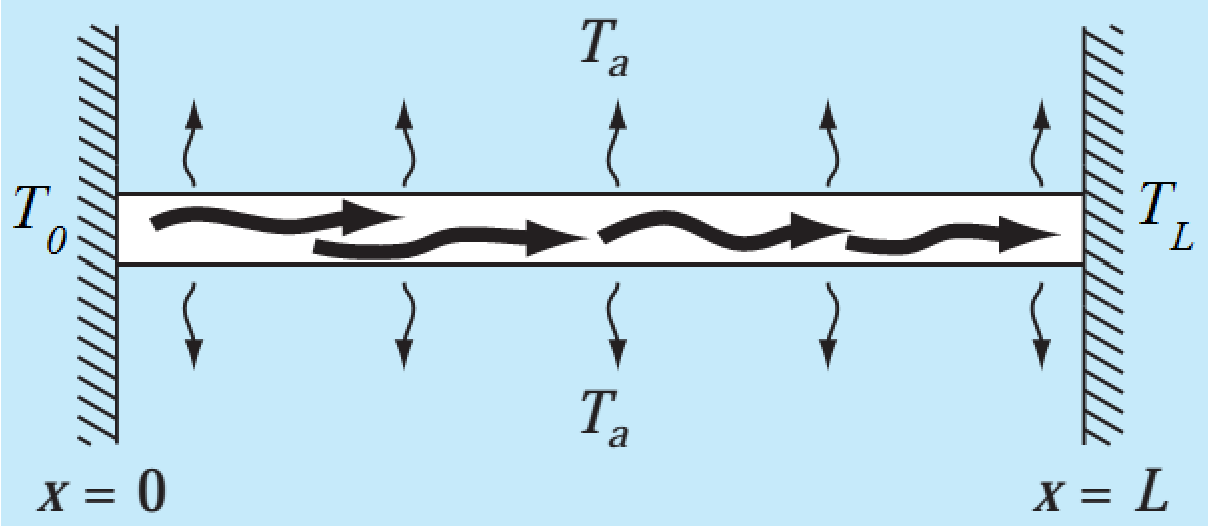
tipo de Dirichlet: $y(a) = y_a$ y $y(b) = y_b$ (2)

tipo de Neumann: $y'(a) = d_a$ y $y'(b) = d_b$ (3)

Para resolver un problema de contorno vamos a usar método de diferencias finitas.

Método de diferencias finitas. Ejemplo

Una varilla uniforme no aislada situada entre dos cuerpos de temperatura constante, y diferente.



Para este caso $T_0 < T_L$ y $T_L > T_a$, donde T_a es temperatura ambiente.

Si la varilla no está aislada a lo largo de su longitud y el sistema está en un estado de equilibrio, la ecuación es

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = h^* \left(T - T_a\right) \,, \qquad (4)$$

donde h^* es un coeficiente de transferencia de calor (m^{-2})

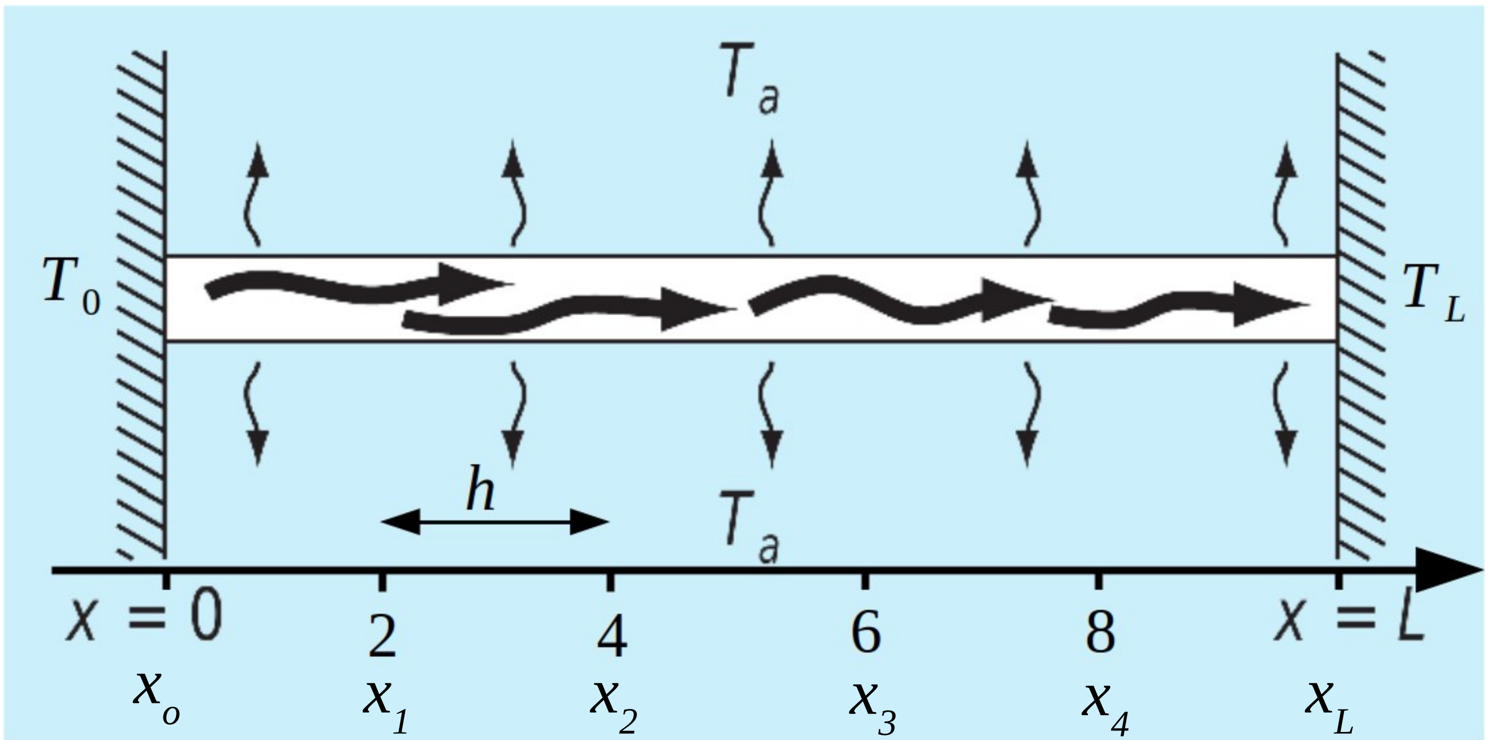
Los condiciones de frontera (Dirichlet) son $T(0) = T_0$ y $T(L) = T_L$, donde L es longitud de la varilla.

Solución analítica de (4) para los parámetros $L = 10\,m$, $T_a = 20$, $T_0 = 40$, $T_L = 200$, y $h^* = 0.01$, es $T = 73.4523\,e^{0.1\,x} - 53.4523\,e^{-0.1\,x} + 20$.

Método de diferencias finitas. Ejemplo

Buscamos solución numérica con el método de diferencias finitas.

Discretizamos el espacio. En lugar de una dependencia continua de la temperatura de la distancia, buscaremos la temperatura en ciertos puntos x.



Reemplazamos la segunda derivada en el lado izquierdo de la ecuación (4) con su aproximación.

$$f''(t_j) = \frac{f(t_{j+1}) - 2f(t_j) + f(t_{j-1})}{h^2}$$

Método de diferencias finitas. Ejemplo

Obtenemos

$$\frac{T_{j+1}-2T_j+T_{j-1}}{h^2}=h^*\left(T_j-T_a\right) \qquad (5)$$

Transferimos todas las incógnitas al lado izquierdo de la ecuación.

$$T_{j+1}-\left(2+h^2h^*\right)T_j+T_{j-1}=-h^2h^*T_a\ , \qquad j=1,\ldots n-1 \qquad (6)$$

donde *n* es cantidad de intervalos.

Escribimos ecu. (6) para todos *j*. Dejamos de lado izquierda solo desconocidos.

Recuerde que solo T_1, T_2, T_3 y T_4 son desconocidos.

$$j=1: \quad T_2-\left(2+h^2h^*\right)T_1=-h^2h^*T_a-T_0$$

$$j=2: \quad T_3-\left(2+h^2h^*\right)T_2+T_1=-h^2h^*T_a$$

$$j=3: \quad T_4-\left(2+h^2h^*\right)T_3+T_2=-h^2h^*T_a$$

$$j=4: \quad -\left(2+h^2h^*\right)T_4+T_3=-h^2h^*T_a-T_L$$

Método de diferencias finitas. Ejemplo

Cambiamos el orden de variables y obtenemos una sistema de ecuaciones lineales tridiagonal

$$-\left(2+h^* h^2\right) T_1 + T_2 = -h^* h^2 T_a - T_0$$
$$T_1 - \left(2+h^* h^2\right) T_2 + T_3 = -h^* h^2 T_a$$
$$T_2 - \left(2+h^* h^2\right) T_3 + T_4 = -h^* h^2 T_a$$
$$T_3 - \left(2+h^* h^2\right) T_4 = -h^* h^2 T_a - T_L$$

Con el paso $h=2$ tenemos

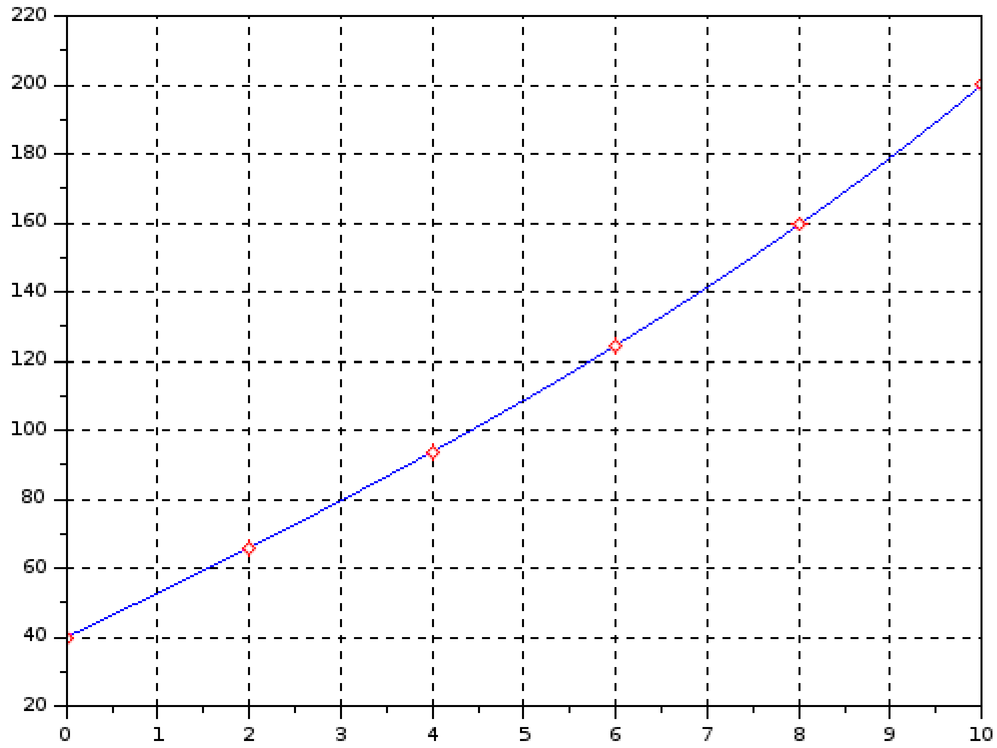
$$-\left(2+h^* h^2\right) = -2 - 0.01 \cdot 2^2 = -2.04$$

y $-h^2 h^* T_a = -0.01 \cdot 2^2 \cdot 20 = -0.8$

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.04 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2.04 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.8 \\ -0.8 \\ -0.8 \\ -200.8 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es $T^T = [40,\ 65.97,\ 93.78,\ 124.54,\ 159.48,\ 200]$

Método de diferencias finitas. Ejemplo



Método de diferencias finitas. Ejemplo con condiciones de frontera de Neumann.

En el problema anterior cambiamos el condiciones de la frontera izquierda

$$x=0 \quad \text{por} \quad \frac{dT(0)}{dx}=T_0' \tag{8}$$

donde T_0' es un valor conocido. Condiciones en el punto $x=L$ dejamos sin cambios $T(L)=T_L$.

Como antes, sustituimos el segunda derivada en ecuación $\frac{d^2T}{dx^2}=h^*(T-T_a)$

con su aproximación $\frac{d^2T}{dx^2}\approx\frac{T_{j+1}-2T_j+T_{j-1}}{h^2}$. Obtenemos sistema tridiagonal

$$T_{j+1}-(2+h^2h^*)T_j+T_{j-1}=-h^2h^*T_a \tag{9}$$

$$j=0,\ldots n-1$$

Ahora T_0 es desconocido. Escribimos ecuación para nodo $x=0$. Tenemos

$$T_{-1}-2T_0+T_1=h^*h^2T_0-h^*h^2T_a \ . \tag{10}$$

Método de diferencias finitas. Ejemplo con condiciones de frontera de Neumann.

La temperatura en el nodo virtual $x=0-h$ podemos encontrar de aproximación de primera derivada de temperatura en el nodo $x=0$

$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \approx \frac{T_1 - T_{-1}}{2h}$. Esto nos da $T_{-1}=T_1-2h\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$.

Recuerde que $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=T_0'$ (Condición de frontera (8)), entonces

$T_{-1}=T_1-2hT_0'$. Ahora podemos escribir (10) como

$T_1-2hT_0'-2T_0+T_1=h^* h^2 T_0-h^* h^2 T_a$.

Colectamos términos de ecuación. Recibimos ecuación para nodo $j=0$

$-\left(2+h^* h^2\right)T_0+2T_1=-h^* h^2 T_a+2hT_0'$

Continuamos para otros nodos. (No tienen cambios)

$$j=1: \quad T_2-\left(2+h^2 h^*\right)T_1+T_0=-h^2 h^* T_a$$

$$j=2: \quad T_3-\left(2+h^2 h^*\right)T_2+T_1=-h^2 h^* T_a$$

$$j=3: \quad T_4-\left(2+h^2 h^*\right)T_3+T_2=-h^2 h^* T_a$$

Método de diferencias finitas. **Ejemplo con condiciones de frontera de Neumann.**

$$j=4: \quad -\left(2+h^2 h^*\right)T_4+T_3=-h^2 h^* T_a-T_L$$

El sistema de ecuaciones que representan distribución de temperatura en varilla con los condiciones (8) es

$$\begin{aligned}
-\left(2+h^* h^2\right)T_0+2T_1&=-h^* h^2 T_a+2hT_0' \\
T_0-\left(2+h^* h^2\right)T_1+T_2&=-h^* h^2 T_a \\
T_1-\left(2+h^* h^2\right)T_2+T_3&=-h^* h^2 T_a \\
T_2-\left(2+h^* h^2\right)T_3+T_4&=-h^* h^2 T_a \\
T_3-\left(2+h^* h^2\right)T_4&=-h^* h^2 T_a-T_L
\end{aligned}$$

O con $L=10m$, $T_a=20$, $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}=0$, $T_L=200$, y $h^*=0.01$

Método de diferencias finitas. **Ejemplo con condiciones de frontera de Neumann.**

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.04 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.04 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.04 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.8 \\ -0.8 \\ -0.8 \\ -200.8 \end{bmatrix}$$

Solución es

$$T^T = [136.80,\ 139.13,\ 146.23,\ 158.39,\ 176.07,\ 200]$$

Un ejemplo común del condición de frontera de Neumann es situación cuando los extremos de varilla son aislados. En este caso $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0$ y $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$

Método de diferencias finitas

Tenemos un ecuación diferencial lineal

$$x''=p(t)x'(t)+q(t)x(t)+r(t) \tag{11}$$

en $[a,b]$ con $x(a)=x_a$ y $x(b)=x_b$. Creamos una malla $a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$, donde $h=(b-a)/N$ y $t_j=a+jh$ para $j=0,1,\ldots,N$.

Las fórmulas de diferencia centrales se utiliza para aproximar las derivadas

$$x'(t_j)=\frac{x(t_{j+1})-x(t_{j-1})}{2h} \quad \text{y} \quad x''(t_j)=\frac{x(t_{j+1})-2x(t_j)+x(t_{j-1})}{h^2} \tag{12}$$

En (12) reemplazamos $x(t_j)$ con x_j , y las ecuaciones resultantes se sustituyen en (11) para obtener la relación

$$\frac{x_{j+1}-2x_j+x_{j-1}}{h^2}=p(t_j)\left(\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}\right)+q(t_j)x_j+r(t_j)\ . \tag{13}$$

Introducimos la notación $p_j=p(t_j)$, $q_j=q(t_j)$, y $r_j=r(t_j)$.

$$\frac{x_{j+1}-2x_j+x_{j-1}}{h^2}=p_j\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{2h}+q_jx_j+r_j \tag{14}$$

Método de diferencias finitas

Multiplicamos ambos lados de (14) por h^2 y colectamos términos de ecuación en forma de la matriz tridiagonal

$$\left(1+\frac{p_j h}{2}\right)x_{j-1}-\left(2+q_j h^2\right)x_j+\left(1-\frac{p_j h}{2}\right)x_{j+1}=r_j h^2\ , \qquad (15)$$

para $j=1,2,\ldots,N-1$.

Introducimos la notación $\left(1+\frac{p_j h}{2}\right)=c_j$, $-\left(2+q_j h^2\right)=d_j$ y $\left(1-\frac{p_j h}{2}\right)=e_j$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales, donde $x(a)=x_a$ y $x(b)=x_b$

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{N-2} & d_{N-2} & e_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{N-1} & d_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 h^2 - c_1 x_a \\ r_2 h^2 \\ r_3 h^2 \\ \vdots \\ r_{N-2} h^2 \\ r_{N-1} h^2 - e_{N-1} x_b \end{bmatrix} \qquad (16)$$