

Tema 9. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

9.1 Introducción a las EDP

9.2 Ecuaciones Elípticas.

9.2.1 Diferencias Finitas

9.2.2 Variables secundarias.

9.3 Ecuaciones Parabólicas.

9.3.1 Método Implícito

9.3.2 Método Explícito

9.3.3 Método de Crank-Nicholson

9.4 Ecuaciones Hiperbólicas

9.4.1 Método de Características

9.4.2 Diferencias Finitas

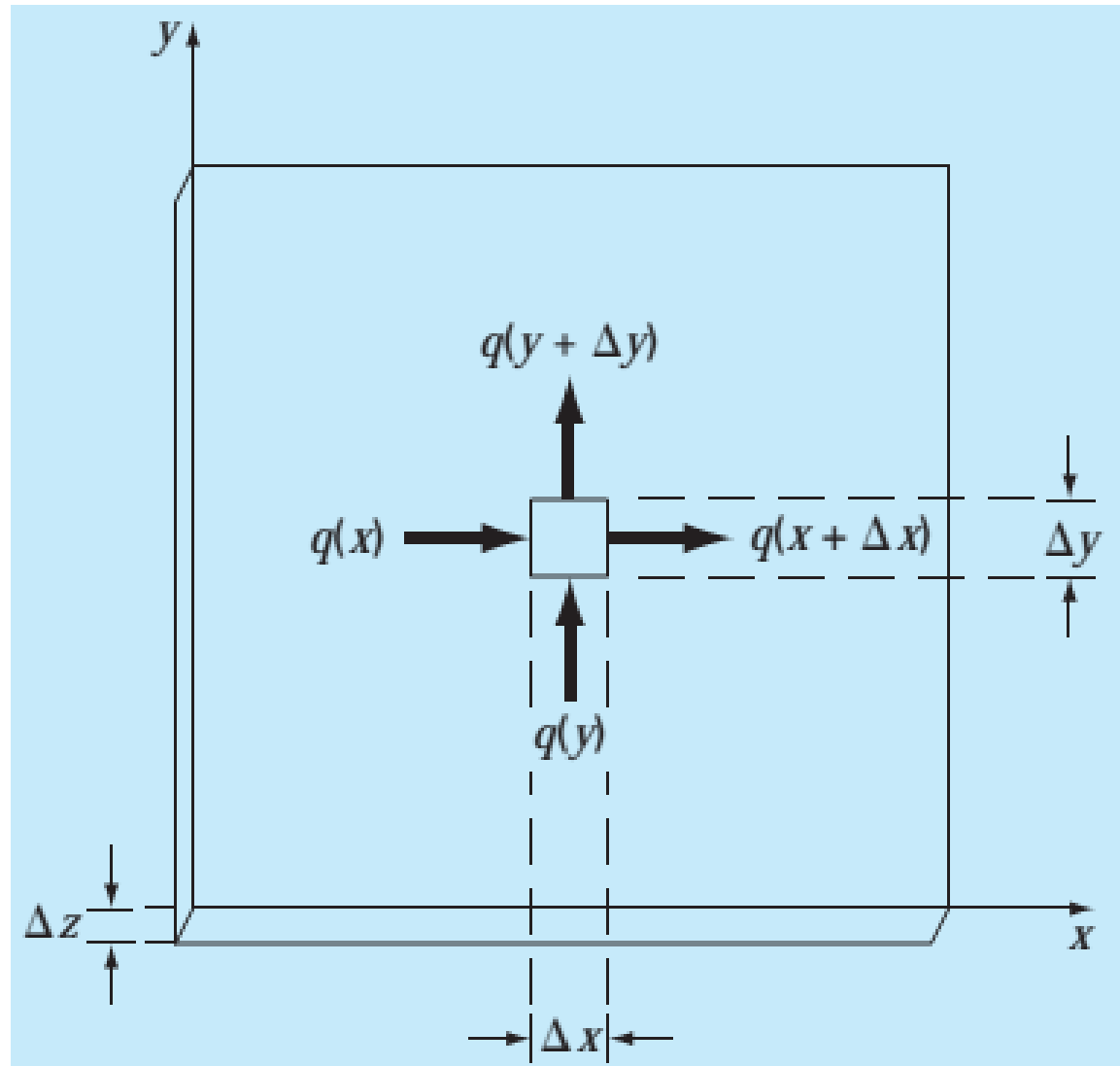
Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas

Ecuaciones elípticas se utilizan para modelar, **problemas de contorno de estado estacionario.**

Ecuación de Laplace. Ejemplo de una placa calentada

La figura muestra un elemento en la cara de una placa delgada rectangular de espesor Δz .

La placa está aislado en todas partes, excepto en sus bordes, donde la temperatura es fija con un nivel prescrito. El aislamiento y la delgadez de la placa significa que la transferencia de calor se limita a los dimensiones x e y . **En el estado estacionario, el flujo de calor que entra en el elemento durante un período de tiempo Δt es igual al flujo de salida.**



Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas

$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x+\Delta x)\Delta y + q(y+\Delta y)\Delta x \quad (1)$$

donde $q(x)$ y $q(y)$ son flujos de calor por unidad de área (**flux**) en direcciones x e y , respectivamente $[cal/(cm^2 s)]$

Recopilamos los términos

$$[q(x) - q(x+\Delta x)]\Delta y + [q(y) - q(y+\Delta y)]\Delta x = 0 \quad (2)$$

Dividimos entre $\Delta x \Delta y$

$$\frac{q(x) - q(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{q(y) - q(y+\Delta y)}{\Delta y} = 0 \quad (3)$$

y tomamos los límites

$$-\frac{\partial q(x)}{\partial x} - \frac{\partial q(y)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Esto es una **ecuación diferencial parcial** que es una expresión de la conservación de la energía para la placa. Sin embargo, **no puede ser resuelto a menos que los flujos de calor se especifican en los bordes de la placa.**

Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas

Debido a que **tenemos las condiciones de contorno para temperatura**, es necesario re-formular la ecuación (4) en los términos de temperatura. El enlace entre el flujo y la temperatura es proporcionada por la **ley de Fourier** de la conducción de calor

$$q(x) = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{y} \quad q(y) = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (5)$$

donde k = **coeficiente de difusividad térmica** (cm^2/s), ρ = densidad del material (g/cm^3), C = **capacidad calorífica del materiales** [$cal/(g \cdot ^\circ C)$], y T = temperatura ($^\circ C$)

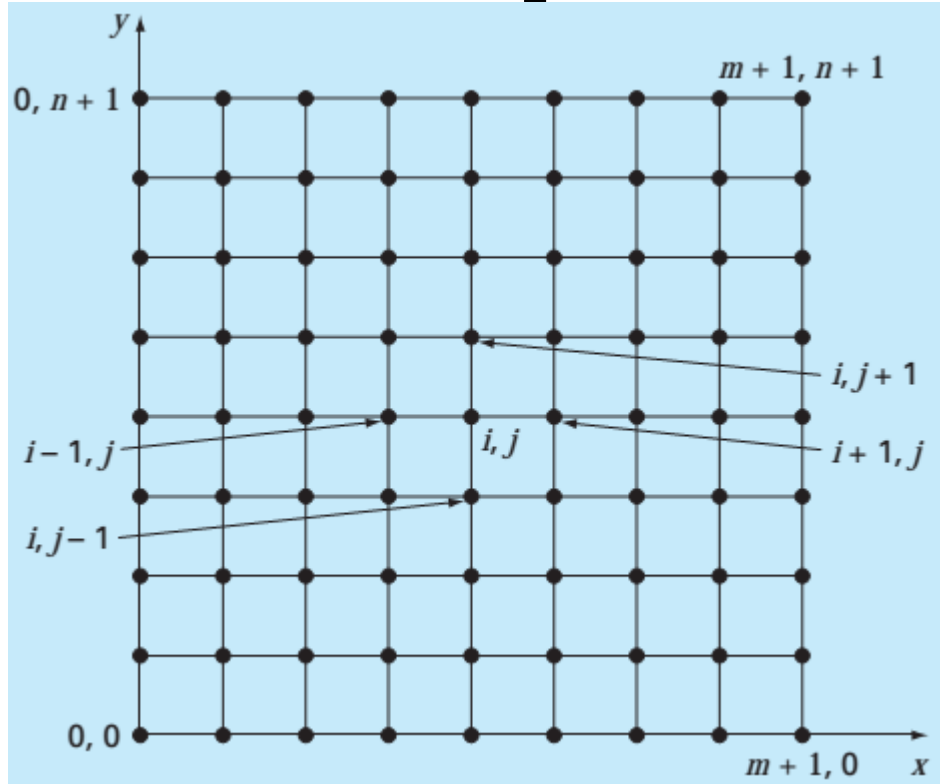
Sustituimos (5) $\rightarrow$ (4). Obtenemos los

Ecuación de **Laplace**
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

O, si hay fuentes o sumideros de calor $f(x, y)$

Ecuación de **Poisson**
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (7)$$

Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas. Solución.



Construimos la malla.

Diferencias centradas basadas en el esquema de la malla son

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (8)$$

Sustituimos (8) → (7). Obtenemos

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

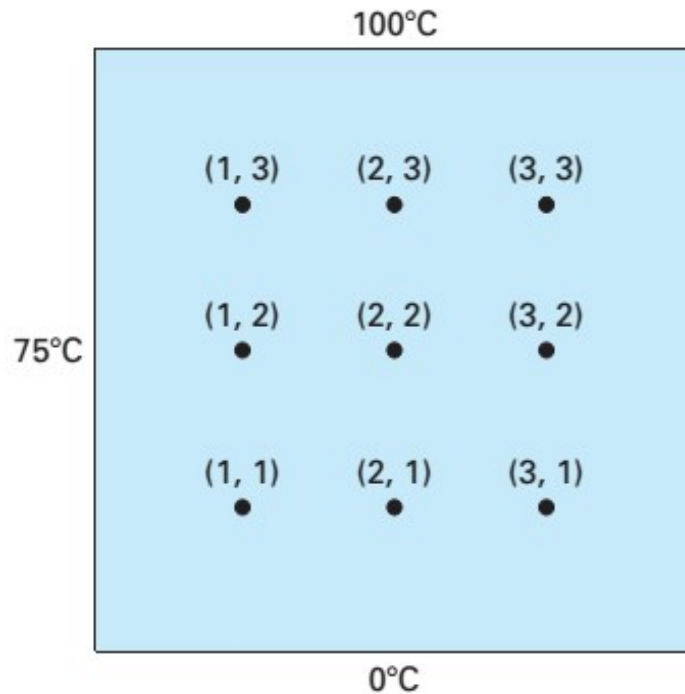
Para la malla cuadrada $\Delta x = \Delta y$ **ecuación de Laplace en diferencias** es

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (9)$$

Sentido físico: promedio de temperatura de vecinos.

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} = T_{i,j}$$

Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas. Solución.



Condiciones de frontera de Dirichlet - es temperatura fija a fronteras de placa.

El balance para nodo (1,1) es

$$T_{21} + T_{01} + T_{12} + T_{10} - 4T_{11} = 0 \text{ . Como } T_{01} = 75$$

$$\text{y } T_{10} = 0 \text{ , por lo tanto } -4T_{11} + T_{12} + T_{21} = -75$$

Ecuaciones similares se pueden desarrollar para los otros puntos del interior. Obtenemos

[illegible]

Ecuaciones Elípticas. Diferencias Finitas. Solución.

Usamos el método de Gauss-Seidel para resolver este sistema lineal.

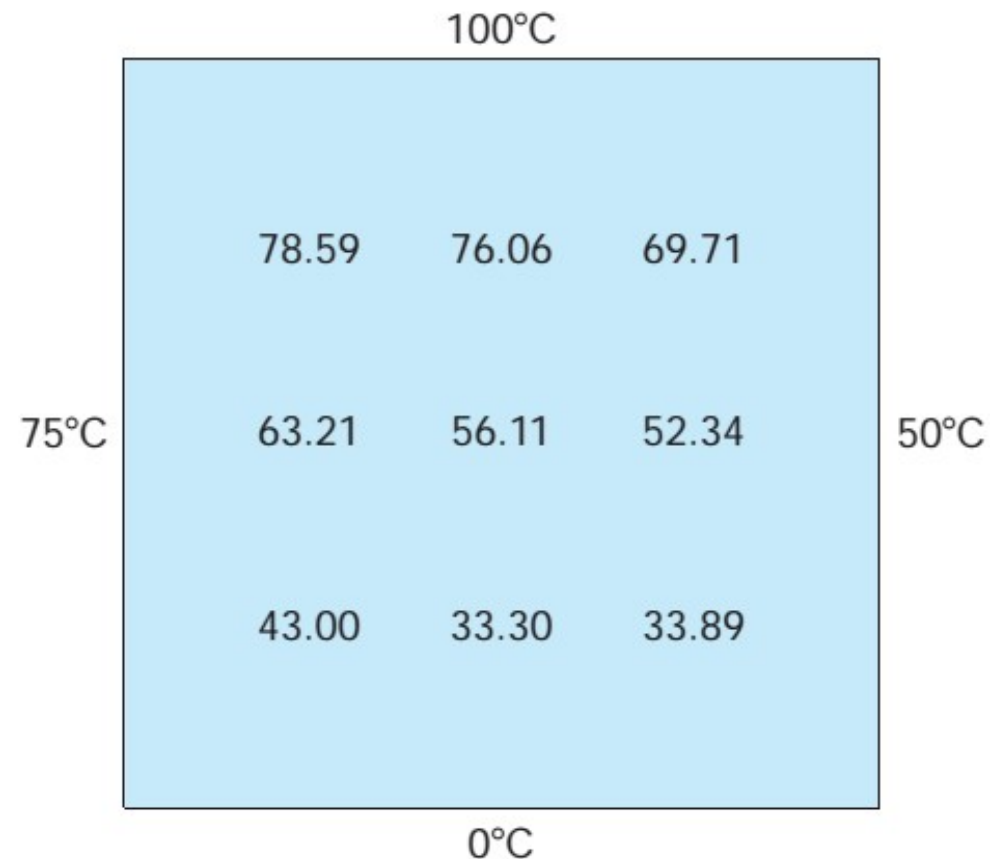
Obtenemos

$$T_{11}=43.00061 \quad T_{21}=33.29755 \quad T_{31}=33.88506$$

$$T_{12}=63.21152 \quad T_{22}=56.11238 \quad T_{32}=52.33999$$

$$T_{13}=78.58718 \quad T_{23}=76.06402 \quad T_{33}=69.71050$$

con un error máximo 0.71%.



Ecuaciones Elípticas. Variables secundarias.

Para la placa calentada, una variable secundaria es la **tasa de flujo de calor** a través de la superficie de la placa. Esta cantidad se puede calcular a partir de la ley de Fourier. Usamos las diferencias finitas centradas en lugar de derivadas en ecuación (5).

$$q_x = -k' \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \text{y} \quad q_y = -k' \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (10)$$

Donde $k' = k\rho C$ es el **coeficiente de conductividad térmica** [$cal/(s \cdot cm \cdot ^\circ C)$]

El flujo de calor resultante es $q_n = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ (11)

donde la dirección de q_n es

$$\theta = \tan^{-1}(q_y/q_x) \quad \text{para} \quad q_x > 0 \quad \text{y} \quad (12)$$

$$\theta = \tan^{-1}(q_y/q_x) + \pi \quad \text{para} \quad q_x < 0$$

El ángulo se puede expresar en grados multiplicándolo por $180^\circ/\pi$. Si $q_x = 0$, θ es $\pi/2$ (90°) o $3\pi/2$ (270°), dependiendo de si q_y es positivo o negativo, respectivamente.

Ecuaciones Elípticas. Variables secundarias. Ejemplo

Distribución del flujo de una placa calentada.

Con los resultados del previo ejemplo determinar la distribución de los flujo de calor para la placa calentada. La placa es de 40×40 cm, aluminio [$k' = 0,49$ cal/(s cm °C)].

Solución. Para $i = j = 1$, la ecuación. (29.14) se puede utilizar para calcular

$$q_x = -0.49 \frac{(33.29755 - 75)}{2(10)} = 1.022 \quad [\text{cal}/(\text{cm}^2 \text{ s})] \quad \text{y}$$

$$q_y = -0.49 \frac{(63.21152 - 0)}{2(10)} = -1.549 \quad [\text{cal}/(\text{cm}^2 \text{ s})]$$

El flujo resultante es:

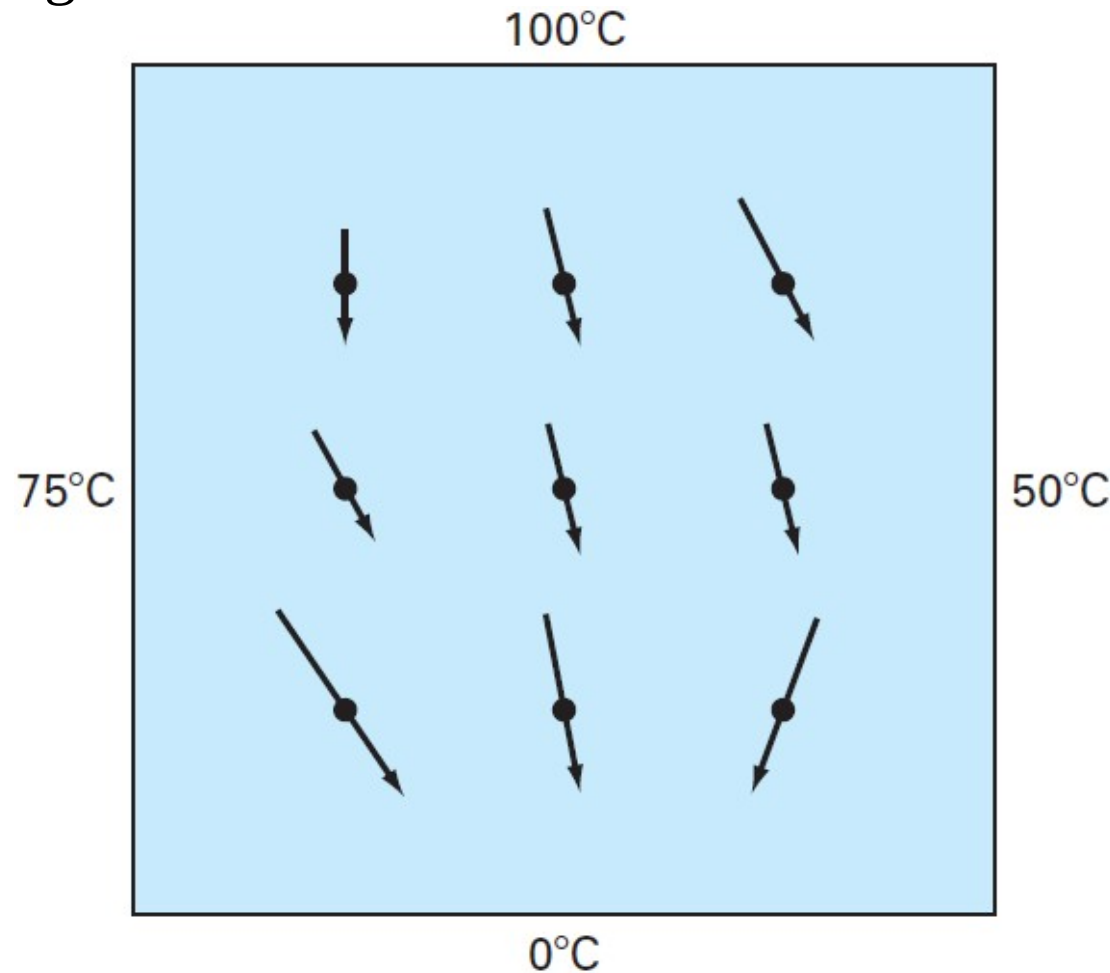
$$q_n = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \sqrt{1.022^2 + (-1.549)^2} = 1.856 \quad [\text{cal}/(\text{cm}^2 \text{ s})]$$

y el ángulo de su trayectoria es

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-1.549}{1.022} \right) = \frac{-0.98758 \cdot 180}{\pi} = -56.584 \quad [\text{grad}]$$

Ecuaciones Elípticas. Variables secundarias. Ejemplo

Por lo tanto, en este punto, el flujo de calor se dirige hacia abajo y hacia la derecha. Los valores en la otra red puntos pueden ser calculados; los resultados se muestran en la figura.



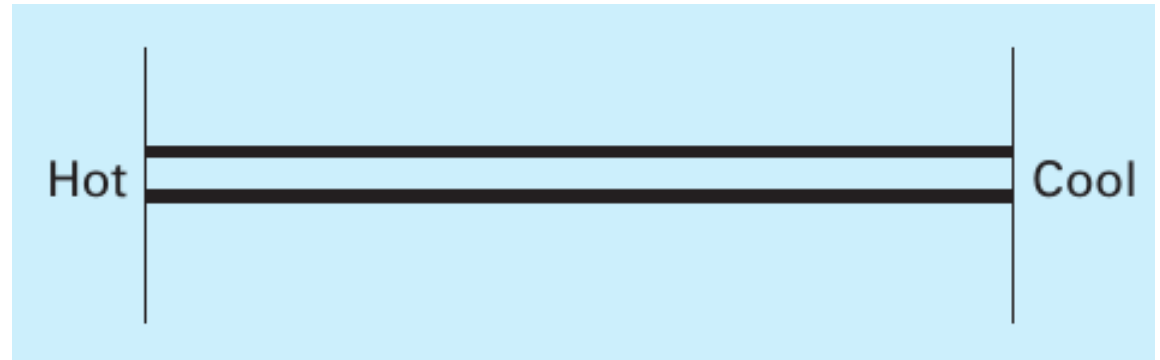
Tarea 28. Desarrollar el programa que calcula y dibuja el distribución de flujo de calor.

Ecuaciones Parabólicas.

Las ecuaciones parabólicas representan los **problemas variables en el tiempo**.

Ejemplo de 1 dimensión.

Usamos el conservación de calor para desarrollar un balance de calor para el elemento



diferencial en el largo de **varilla delgada y aislada**. Sin embargo, en lugar de examinar el caso de estado estacionario, la presente equilibrio también considera la **cantidad de calor almacenado** en el elemento durante un **período unitario de tiempo** Δt . Entonces, la balanza está en la forma, **entradas-salidas=almacenamiento** o

$$q(x) \Delta y \Delta z \Delta t - q(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \Delta t = \Delta x \Delta y \Delta z \rho C \Delta T$$

donde C = capacidad calorífica del materiales $[cal/(g \cdot ^\circ C)]$

Dividimos por el elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ y Δt

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Ecuaciones Parabólicas.

Tomamos los límites

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Usamos la **ley de Fourier** $q(x) = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial x}$ y obtenemos la **ecuación de conducción de calor**

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

Ecuaciones parabólicas se pueden resolver mediante la sustitución de diferencias divididas finitas en lugar de las derivadas parciales. Sin embargo, en contraste con las EDP elípticas, debemos considerar ahora los cambios en el tiempo, así como en el espacio. Mientras que las ecuaciones elípticas fueron delimitadas en todas las dimensiones, EDP parabólicos son **abiertos** en el espacio temporal.

Dos métodos fundamentales de solución de EDP parabólicos se usan: los métodos **explícitos** e **implícitos**.

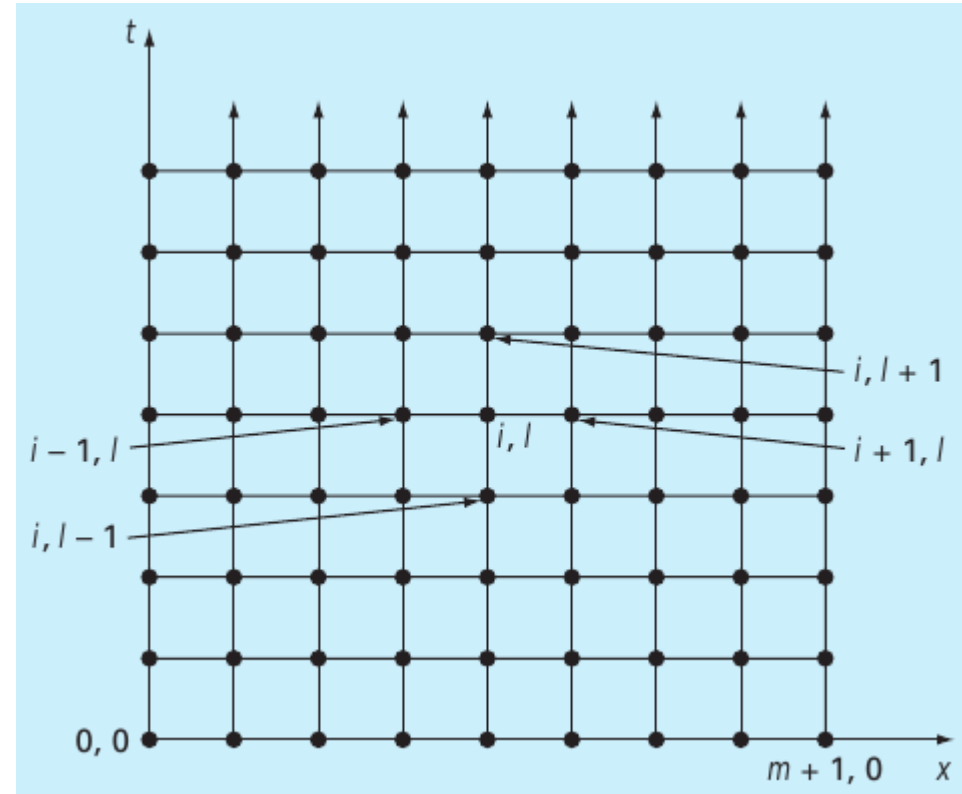
Ecuaciones Parabólicas. Método Explícito

Sustituimos los **derivadas** en (13) con su aproximaciones. Usamos la diferencia **centrada** para derivada al respecto a x y la diferencia **progresiva** para derivada al respecto a t .

$$k \frac{T_{i+1,l} - 2T_{i,l} + T_{i-1,l}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_{i,l+1} - T_{i,l}}{\Delta t} \quad 0$$

$$\text{con } \lambda = \frac{k \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$T_{i,l+1} = T_{i,l} + \lambda (T_{i+1,l} - 2T_{i,l} + T_{i-1,l}) \quad (14)$$



Escribimos esta ecuación para todos los nodos interiores de la varilla. Esto nos da **un método explícito** para calcular los valores en cada nodo para un tiempo futuro basando de los valores presentes en el nodo y sus vecinos. En realidad esto es el **método de Euler** para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es decir, si conocemos la distribución de la temperatura como una función de la posición en un momento inicial, podemos calcular la distribución en un tiempo futuro.

Ecuaciones Parabólicas. Método Explícito. Ejemplo

Descripción del problema.

Utilice el método explícito para encontrar la distribución de temperatura de una barra larga, delgada y aislada con una longitud de 10 cm. Otros valores son:

$$k' = 0.49 \quad [cal/(s \cdot cm \cdot ^\circ C)] , \quad \Delta x = 2 \text{ cm} , \quad \Delta t = 0.1 \text{ s} .$$

A $t=0$, la temperatura de la varilla es cero.

Las condiciones de contorno son fijos para todos los tiempos en $T(0)=100^\circ C$ y $T(10)=50^\circ C$.

El material de varilla es aluminio con $C=0.2174 \quad [cal/(g \cdot ^\circ C)]$ y $\rho=2.7 \text{ g/cm}^3$. Por lo tanto, $k=k' / (\rho C) = 0.49 / (2.7 \cdot 0.2174) = 0.835 \text{ cm}^2/\text{s}$ y $\lambda = 0.835 \cdot 0.1 / 2^2 = 0.020875$.

Solución.

Aplicando la ecuación (14) obtenemos el siguiente valor en $t=0.1 \text{ s}$ para el nodo en $x=2 \text{ cm}$:

$$T_{1,1} = 0 + 0.020875 [0 - 2(0) + 100] = 2.0875$$

Ecuaciones Parabólicas. Método Explícito. Ejemplo

$$T_{2,1} = 0 + 0.020875[0 - 2(0) + 0] = 0$$

$$T_{3,1} = 0 + 0.020875[0 - 2(0) + 0] = 0$$

$$T_{4,1} = 0 + 0.020875[50 - 2(0) + 0] = 1.0438$$

A $t = 0.2 \text{ s}$, los valores correspondientes a los cuatro nodos interiores son:

$$T_{1,2} = 2.0875 + 0.020875[0 - 2(2.0875) + 100] = 4.0878$$

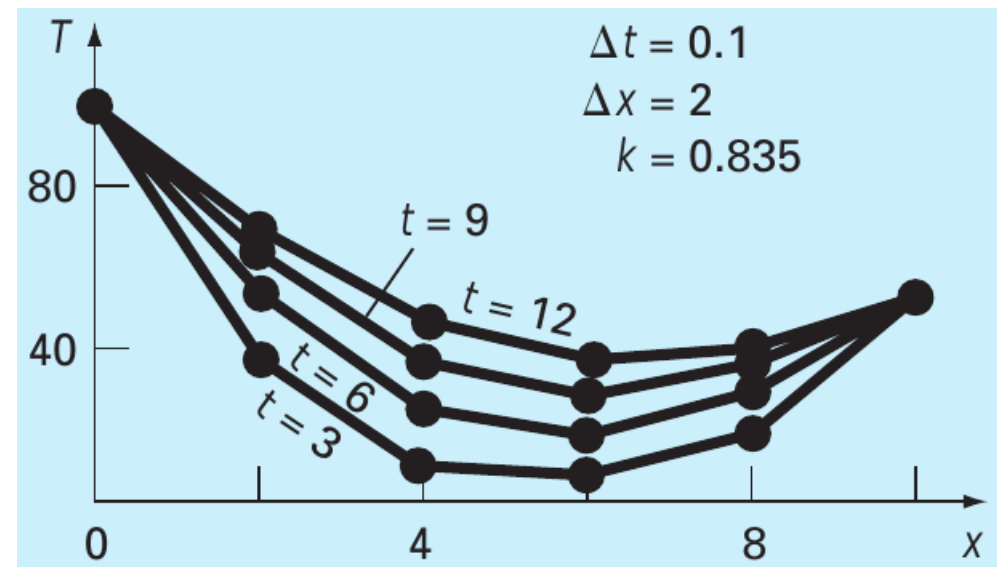
$$T_{2,2} = 0 + 0.020875[0 - 2(0) + 2.0875] = 0.043577$$

$$T_{3,2} = 0 + 0.020875[1.0438 - 2(0) + 0] = 0.021788$$

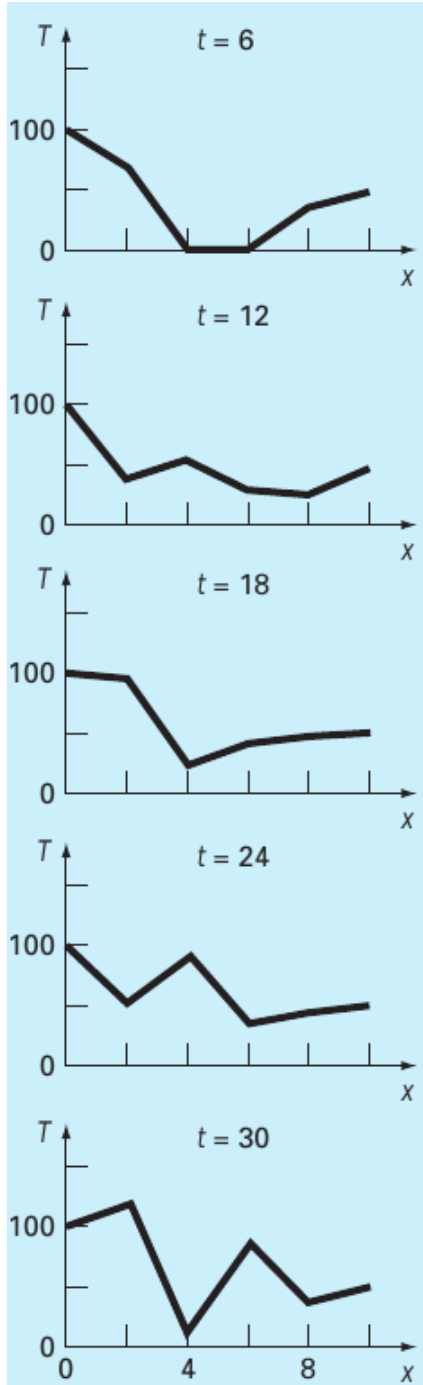
$$T_{4,2} = 1.0438 + 0.020875[50 - 2(1.0438) + 0] = 2.0439$$

El cálculo se continúa, y los resultados para los intervalos de 3 segundos se representan en la figura.

El aumento general de la temperatura con el tiempo indica que el cálculo captura la difusión del calor de los extremos a la barra.



Ecuaciones Parabólicas. Método Explícito.



Convergencia y estabilidad.

Convergencia significa que cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, los resultados se acercan a la solución verdadera. **Estabilidad** significa que los errores en cualquier etapa de la computación no se amplifican, pero se atenúan al progreso del cálculo. Se puede demostrar que el método explícito **es convergente y estable** si $\lambda \leq 1/2$, o $\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k}$ (15)

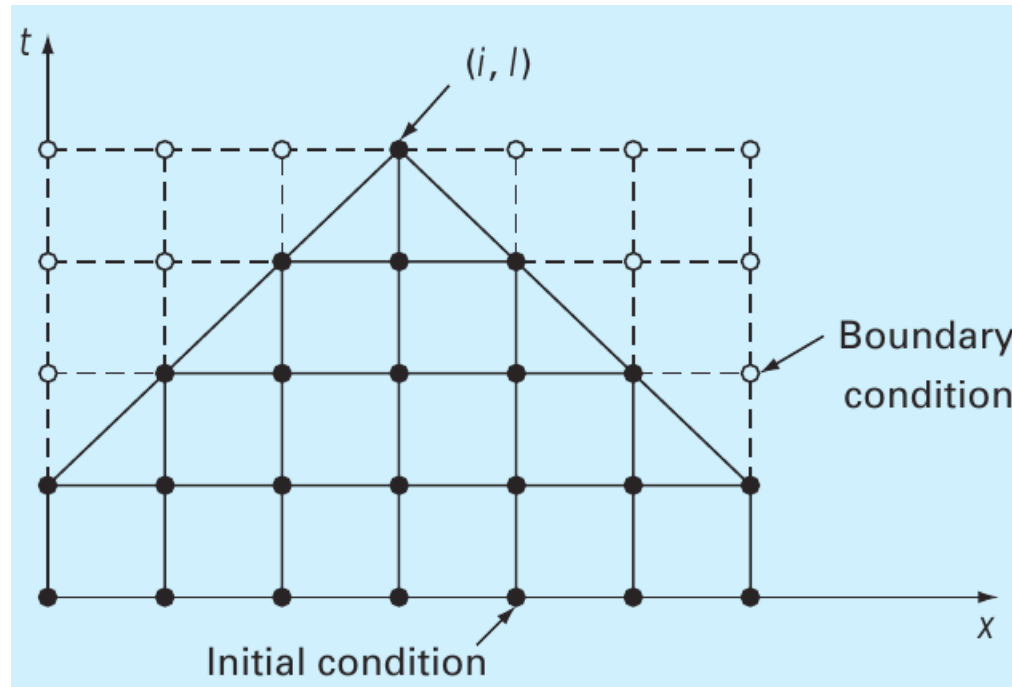
El valor $\lambda \leq 1/2$ podría resultar en una solución en la que **los errores no crecen, pero oscilan**. $\lambda \leq 1/4$ garantiza que la solución **no oscilará**. $\lambda = 1/6$ tiende a **minimizar el error de truncamiento**.

Hay **una fuerte limitación** en el método explícito. Si Δx se reduce $\Delta x = \Delta x/2$ de acuerdo a (15), cantidad de pasos de tiempo deben ser **aumentados en un factor de 4**.

Hay **una fuerte limitación** en el método explícito. Si Δx se reduce $\Delta x = \Delta x/2$ de acuerdo a (15), cantidad de pasos de tiempo deben ser **aumentados en un factor de 4**.

Finalmente, la reducción de Δx **a la mitad**, para el caso unidimensional, se resulta en un aumento de **ocho veces** en el número de cálculos.

Ecuaciones Parabólicas. Método Explícito.



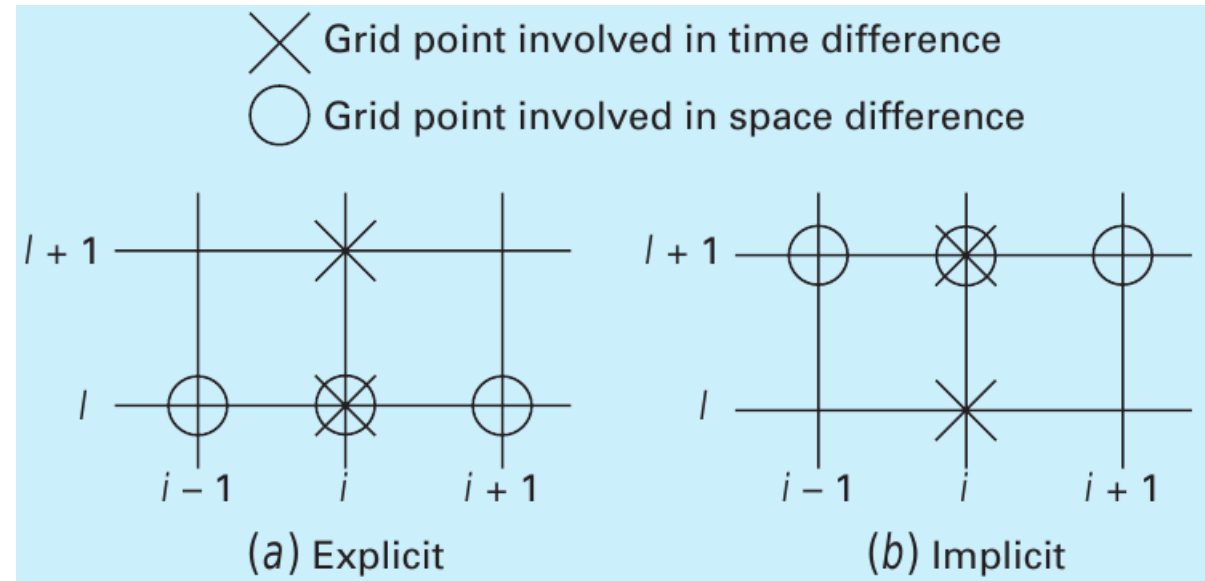
Desventajas.

Además de los problemas relacionados con la **estabilidad**, la formulación explícita **no incluye información que tiene una incidencia en la solución**.

La figura muestra el efecto de otros nodos a nodo (i, l) usando un esquema explícito. Los nodos sombreados tienen una influencia en (i, l) , mientras que los nodos no sombreados, que en realidad afectan (i, l) , están excluidos.

Métodos implícitos superar estas dificultades tanto a expensas de los algoritmos de algo más complicadas.

Ecuaciones Parabólicas. Método Implícito.



Un método implícito simple

La diferencia fundamental entre las aproximaciones explícitas e implícitas. Para la forma explícita, aproximamos la derivada espacial a $t=l$. Recuerda que cuando sustituimos esta aproximación a la ecuación diferencial parcial, se obtuvo una ecuación en diferencias (14) con una sola incógnita $T_{i,l+1}$. Por lo tanto, podemos resolver esta ecuación "explícitamente".

En los métodos implícitos, la derivada espacial se aproxima a un nivel de tiempo avanzado $l+1$. Por ejemplo, la segunda derivada se aproxima por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,l+1} - 2T_{i,l+1} + T_{i-1,l+1}}{(\Delta x)^2} \quad (16)$$

Ecuaciones Parabólicas. Método Implícito.

Cuando sustituimos (16) en el EDP original, la ecuación resultante va a tener **varias incógnitas**.

$$k \frac{T_{i+1,l+1} - 2T_{i,l+1} + T_{i-1,l+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_{i,l+1} - T_{i,l}}{\Delta t} \quad (17)$$

Por lo tanto, **no puede ser resuelto de forma explícita**. En lugar de esto, **todo el sistema de ecuaciones debe ser resuelto simultáneamente** en cada punto del tiempo.

Reescribimos (17) en forma

$$-\lambda T_{i-1,l+1} + (1+2\lambda)T_{i,l+1} - \lambda T_{i+1,l+1} = T_{i,l} \quad (18)$$

donde $\lambda = k \Delta t / (\Delta x)^2$.

Ecuación (18) puede ser aplicada a todos, excepto el primero y último nodos interiores. La **condición de contorno a el extremo izquierdo** ($i=0$) se puede expresar como

$$T_{0,l+1} = f_0(t_{l+1}) \quad (19)$$

donde $f_0(t_{l+1})$ es una función que describe cómo la temperatura de extremo cambia con el tiempo.

Ecuaciones Parabólicas. Método Implícito.

Sustituimos (19) en (18).

$$(1+2\lambda)T_{1,l+1}-\lambda T_{2,l+1}=T_{1,l}+\lambda f_0(t_{l+1}) \quad (20)$$

Del mismo modo, para el último nodo interior $(i=m)$,

$$-\lambda T_{m-1,l+1}+(1+2\lambda)T_{m,l+1}=T_{m,l}+\lambda f_{m+1}(t_{l+1}) \quad (21)$$

donde $f_{m+1}(t_{l+1})$ describe los cambios de temperatura a el extremo derecho $(i=m+1)$.

Las ecuaciones (18), (20) y (21) escritos para todos los nodos interiores resultan en un **sistema tridiagonal** de ecuaciones lineales de tamaño $m \times m$ que tiene m incógnitas.

Ejemplo. Descripción del problema.

Usan el método implícito para resolver el mismo problema que en el Ejemplo anterior.

Solución.

Para instante $l=1$, con $\lambda=0.020875$, de ecu. (20), para primero nodo interior $(i=1)$ tenemos

$$1.04175 T_{1,1}-0.020875 T_{2,1}=0+0.020875 (100) . \text{ O}$$

Ecuaciones Parabólicas. Método Implícito.

$$1.04175 T_{1,1} - 0.020875 T_{2,1} = 2.0875$$

Con Ecs. (30.8) y (21) tenemos

$$\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1.04375 \end{bmatrix}$$

Solución de este sistema nos da $\begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0047 \\ 0.0406 \\ 0.0209 \\ 1.0023 \end{bmatrix}$. **Compara este resultado con**

paso 1 de método implícito.

Para resolver las temperaturas a $t=0.2$, el vector de lado de mano derecha debe ser modificado para tener en cuenta los resultados de la primera paso.

Ecuaciones Parabólicas. Método Implícito.

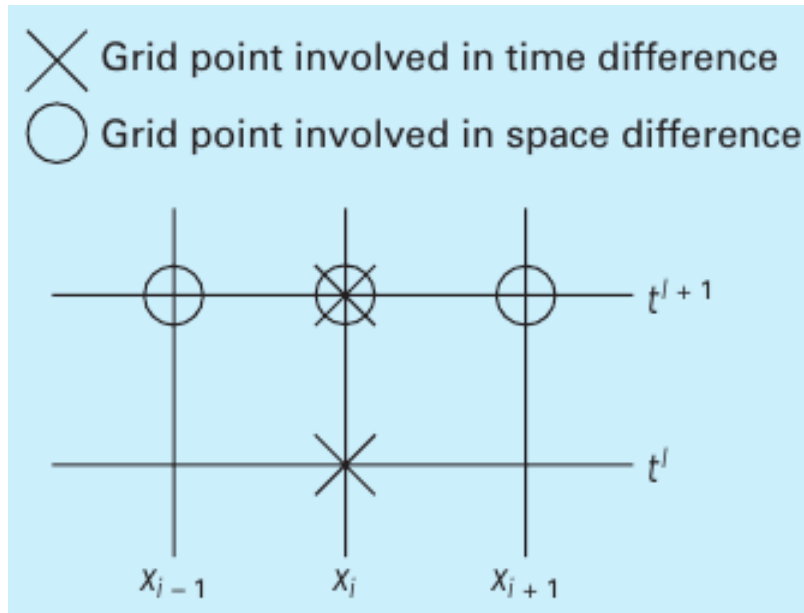
$$\begin{bmatrix} 1.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 1.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 1.04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.09215 \\ 0.04059 \\ 0.02090 \\ 2.04069 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema tenemos distribución de temperatura para $t=0.2$

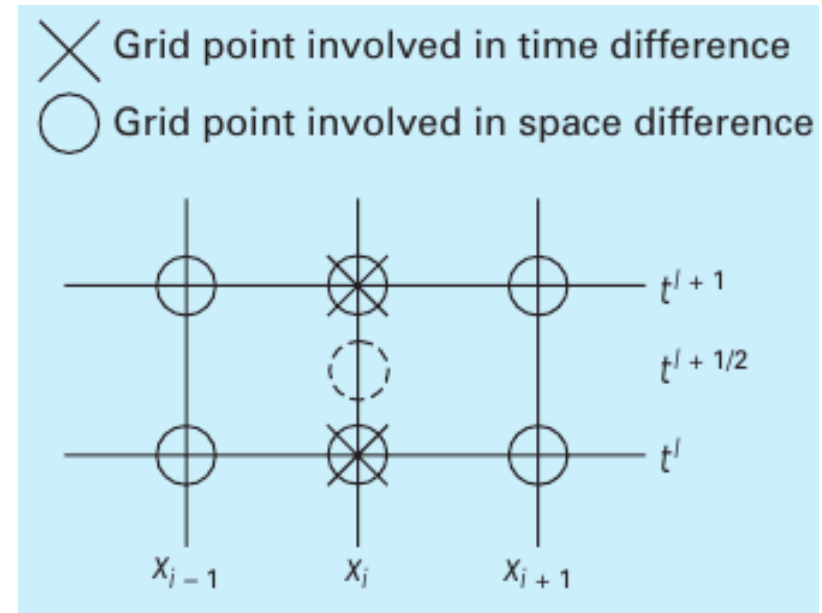
$$\begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9305 \\ 0.1190 \\ 0.0618 \\ 1.9653 \end{bmatrix}$$

Aunque el método implícito simple es **incondicionalmente estable**, hay un límite de precisión para el uso de grandes pasos de tiempo. En consecuencia, **no es mucho más eficiente** que los métodos explícitos para la mayoría de los problemas.

Ecuaciones Parabólicas. Método de Crank-Nicholson



Método implícito simple



Método Crank-Nicholson

El método de Crank-Nicolson proporciona un esquema implícito que es de segundo orden exactitud en el espacio y el tiempo.

Como antes derivada temporal es $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,l+1} - T_{i,l}}{\Delta t}$. Para derivada espacial usamos regla de trapecio.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i+1,l} - 2T_{i,l} + T_{i-1,l}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1,l+1} - 2T_{i,l+1} + T_{i-1,l+1}}{(\Delta x)^2} \right]$$

Ecuaciones Parabólicas. Método de Crank-Nicholson

Entonces esquema de diferencias finitas es

$$\frac{k}{2} \left[\frac{T_{i+1,l} - 2T_{i,l} + T_{i-1,l}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1,l+1} - 2T_{i,l+1} + T_{i-1,l+1}}{(\Delta x)^2} \right] = \frac{T_{i,l+1} - T_{i,l}}{\Delta t}$$

Después de colección de los términos

$$-\lambda T_{i-1,l+1} + 2(1+\lambda)T_{i,l+1} - \lambda T_{i+1,l+1} = \lambda T_{i-1,l} + 2(1-\lambda)T_{i,l} + \lambda T_{i+1,l} \quad (22)$$

Usamos las condiciones de contorno $T_{0,l+1} = f_0(t_{l+1})$ y $T_{m+1,l+1} = f_{m+1}(t_{l+1})$ para obtener primero e ultimo ecuaciones.

$$2(1+\lambda)T_{1,l+1} - \lambda T_{2,l+1} = \lambda f_{0,l} + 2(1-\lambda)T_{1,l} + \lambda T_{2,l} + \lambda f_{0,l+1} \quad (23)$$

y

$$-\lambda T_{m-1,l+1} + 2(1+\lambda)T_{m,l+1} = \lambda T_{m-1,l} + 2(1-\lambda)T_{m,l} + \lambda f_{m+1,l} + \lambda f_{m+1,l+1} \quad (24)$$

Ejemplo. Descripción del problema.

Usan el método de Crank-Nicholson para resolver el mismo problema que en el Ejemplo anterior.

Ecuaciones Parabólicas. Método de Crank-Nicholson

Solución.

Usamos las ecuaciones (22), (23) y (24)

$$\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.175 \\ 0 \\ 0 \\ 2.0875 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos distribución de temperatura para $t=0.1$

$$\begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0450 \\ 0.0210 \\ 0.0107 \\ 1.0225 \end{bmatrix}$$

Para obtener solución en instante $t=0.2$ re-calculamos el vector de lado de mano derecha.

Ecuaciones Parabólicas. Método de Crank-Nicholson

$$\begin{bmatrix} 2.04175 & -0.020875 & 0 & 0 \\ -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 & 0 \\ 0 & -0.020875 & 2.04175 & -0.020875 \\ 0 & 0 & -0.020875 & 2.04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1801 \\ 0.0841 \\ 0.0427 \\ 4.0901 \end{bmatrix}$$

La solución es

$$\begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \\ T_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0073 \\ 0.0826 \\ 0.0422 \\ 2.0036 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones Parabólicas. Método de Crank-Nicholson

Comparación de soluciones analíticas y numéricas

La solución analítica para el punto $x=2\text{ cm}$ a $t=10\text{ s}$ es 64.8018

Δt	λ	Explícito	Implícito	Crank-Nicolson
10	2.0875	208.75	53.01	79.77
5	1.04375	-9.13	58.49	64.79
2	0.4175	67.12	62.22	64.87
1	0.20875	65.91	63.49	64.77
0.5	0.104375	65.33	64.12	64.74
0.2	0.04175	64.97	64.49	64.73