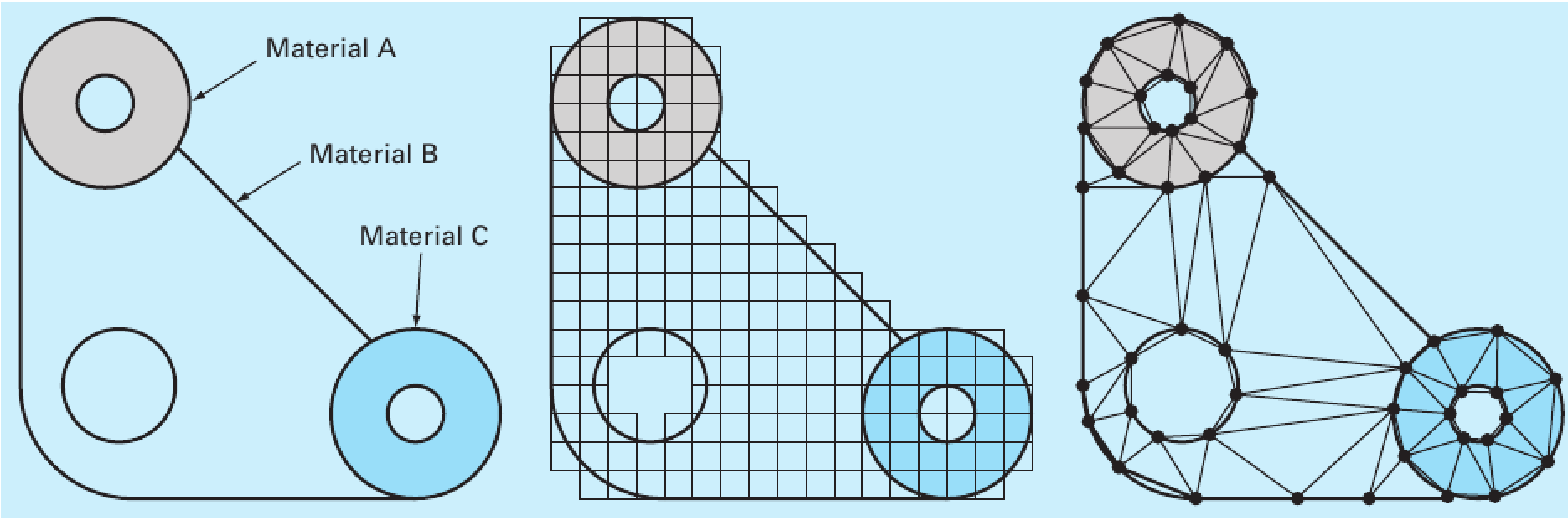
Tema 9. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

9.5 Introducción a el Método de los elementos finitos

EDP. Método de los elementos finitos



a) b) c)

(a) Geometría irregular y la composición no homogénea.

(b) Es muy difícil de modelar con el método de diferencias finitas.

(c) Una discretización de elementos finitos es mucho más adecuada para tales sistemas.

EDP. Método de los elementos finitos

El método de elementos finitos **divide el dominio de la solución en regiones**, con las formas simples, o "**elementos**". Una **solución** aproximada para el EDP puede ser desarrollado **para cada uno de estos elementos**. La **solución total** es generado luego **uniendo las soluciones individuales** en tal manera que se garantiza l**a continuidad en los límites entre elementos**. Por lo tanto, la EDP se satisface de una manera a trozos.

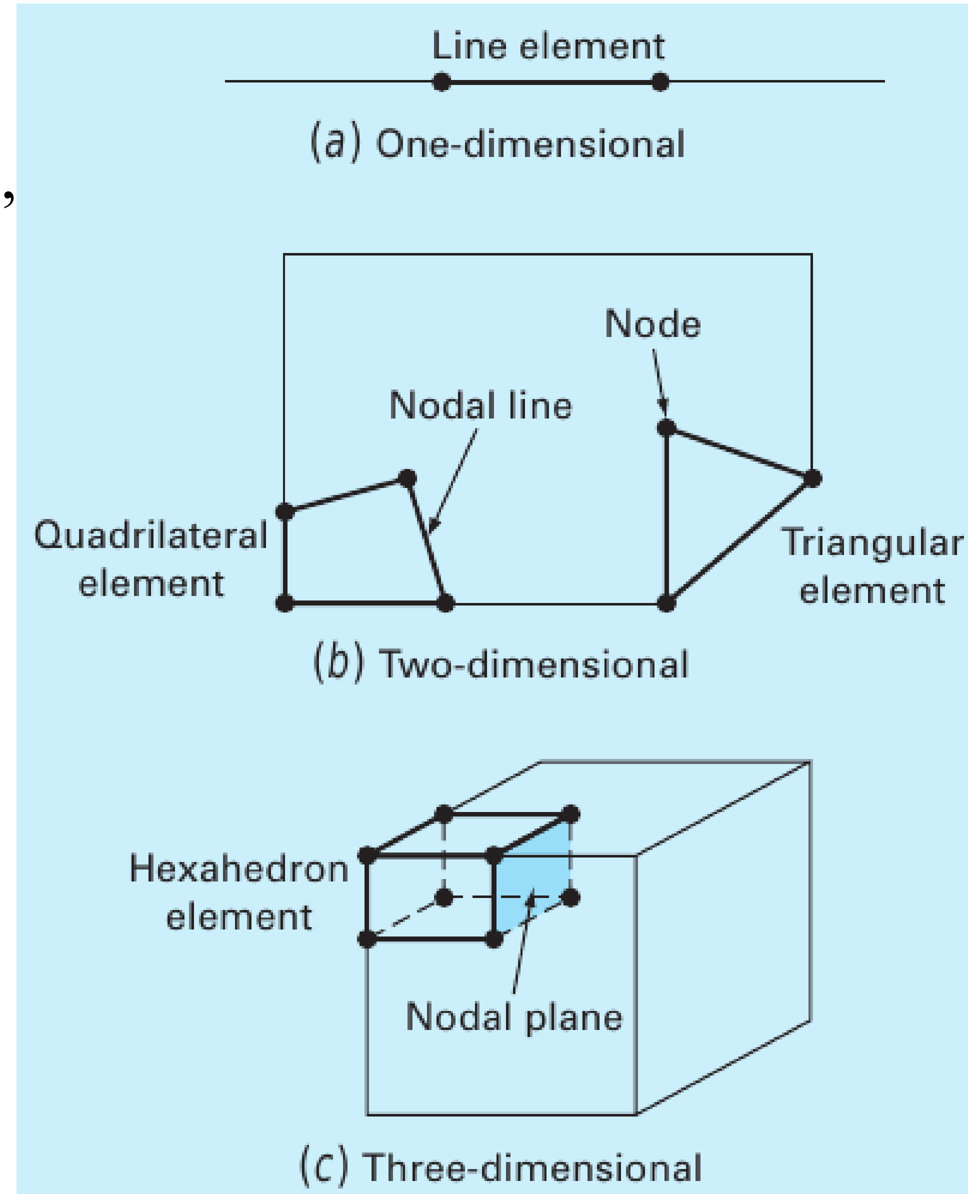
En método de elementos finitos los **valores desconocidos** se pueden generar de **forma continua** a través de todo el dominio de la solución **en lugar de en puntos aislados**.

La aplicación del enfoque de elementos finitos por lo general sigue un procedimiento estándar, paso a paso.

EDP. Método de los elementos finitos

1. Discretización. Este paso consiste en **dividir el dominio de la solución en elementos finitos**.

Elementos, Nodos o Vértices, Aristas, Facetas o Caras.



EDP. Método de los elementos finitos

2. Ecuaciones de los elementos

El siguiente paso es desarrollar ecuaciones que aproximan la solución para cada elemento. Esto implica **dos pasos**. En primer lugar, debemos **elegir una función apropiada** con los coeficientes desconocidos que se utilizará para aproximar la solución. En segundo lugar, se **evalúan los coeficientes** de modo que la función se aproxima a la solución de una manera óptima.

Elección de funciones de aproximación. Usamos **polinomios** debido a que son fáciles de manipular. Para el caso unidimensional, es un polinomio de primer orden o **línea recta**

$$u(x)=a_0+a_1 x \tag{1}$$

donde $u(x)$ = la variable dependiente, a_0 y a_1 = constantes, y x = la variable independiente. Esta función debe pasar a través de los valores de $u(x)$ en los puntos extremos del elemento en x_1 y x_2. Por lo tanto,

$$u_1=a_0+a_1 x_1$$
$$u_2=a_0+a_1 x_2$$

EDP. Método de los elementos finitos

donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$. Estas ecuaciones se pueden resolver utilizando la regla de Cramer

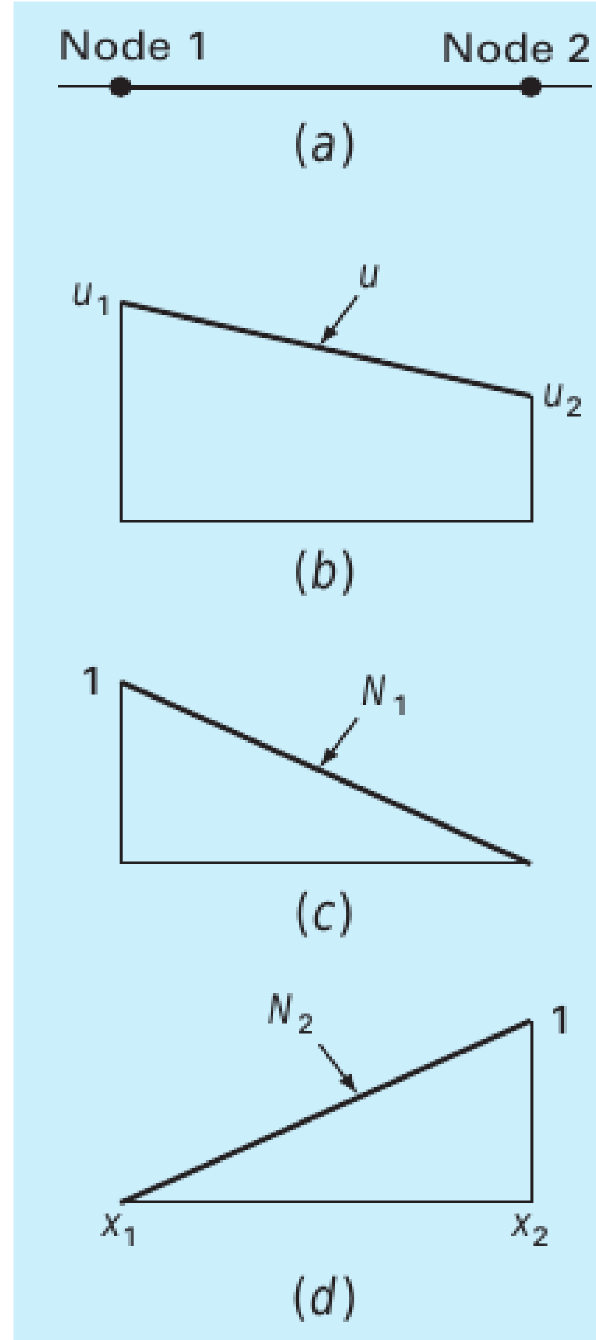
$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \qquad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituimos estos resultados en (1) y recibimos la **función de aproximación**, o la **función de la forma**,

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \tag{2}$$

donde $N_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ y $N_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ son las **funciones de interpolación**.

De la figura vemos que, esto es un **polinomio de Lagrange** de primer orden. Podemos predecir valores intermedios entre los valores determinados u_1 y u_2 en los nodos.



Observe que la **suma de las funciones de interpolación es igual a uno**.

EDP. Método de los elementos finitos

Además, el hecho de que se trata de ecuaciones lineales facilita las operaciones tales como la diferenciación y la integración. El derivada de la ecuación (2) es

$$\frac{du}{dx}=\frac{dN_1}{dx}u_1+\frac{dN_2}{dx}u_2$$

$$\frac{dN_1}{dx}=\frac{-1}{x_2-x_1} \quad \text{y} \quad \frac{dN_2}{dx}=\frac{1}{x_2-x_1} \tag{3}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x_2-x_1}\left(-u_1+u_2\right) \tag{4}$$

El integral de (2) es

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dx=\frac{u_1+u_2}{2}\left(x_2-x_1\right) \tag{5}$$

EDP. Método de los elementos finitos

Ajuste óptimo de la función en la solución. Cuando la función de interpolación esta elegida, la ecuación que gobierna el comportamiento del elemento debe ser desarrollado. Esta ecuación representa un ajuste de la función a la solución de la ecuación diferencial. Varios métodos existen. Más comunes son el enfoque directo, el método de residuos ponderados, y el enfoque variacional. El resultado de estos métodos es análoga a la ajuste de curvas. Sin embargo, en lugar de ajustar los datos de funciones, estos métodos especifican las relaciones entre las incógnitas en la ecuación (2) que satisfacen la EDP subyacente de una manera óptima.

Matemáticamente, las ecuaciones resultantes de elementos a menudo consistirán en un conjunto de ecuaciones lineales que se pueden expresar en forma de matriz

$$[k](u)=(F) \tag{6}$$

donde $[k]$ = **una matriz de propiedad de elementos**, (u) = un vector columna de las incógnitas en los nodos, y (F) = un vector columna que refleja el efecto de cualesquiera influencias externas aplicadas en los nodos. Tenga en cuenta que, en algunos casos, las ecuaciones pueden ser no lineal.

EDP. Método de los elementos finitos

3. Montaje

Después las ecuaciones de elementos individuales deben ser unidos entre sí o **montados** para caracterizar el comportamiento unificado de todo el sistema. El proceso de montaje se rige por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones para elementos contiguos se emparejan de manera que los valores desconocidos (y algunas veces los derivadas) en sus nodos comunes son equivalentes. Por lo tanto, la solución total será continua.Cuando todas las versiones individuales de la ecuación (5) se ensamblan finalmente, todo el sistema se expresa en forma de matriz como

$$[K](u')=(F') \qquad (7)$$

donde $[K]$ = la matriz de propiedad de montaje y (u') y (F') = vectores columnas de incógnitas y las fuerzas externas. Cada de estos vectores son un conjunto de los vectores (u) y (F) de los elementos individuales.

EDP. Método de los elementos finitos

4. Condiciones de frontera

Antes de resolver la ecuación (6), esto debe ser modificado para tener en cuenta las condiciones de contorno del sistema. Estos ajustes resultan en

$$[\bar{k}](u')=(\bar{F}') \qquad (8)$$

donde los barras significan que las condiciones de contorno se han incorporado.

5 Solución

Con la descomposición LU, técnicas para las matrices dispersos, métodos iterativos.

6 Postprocessing

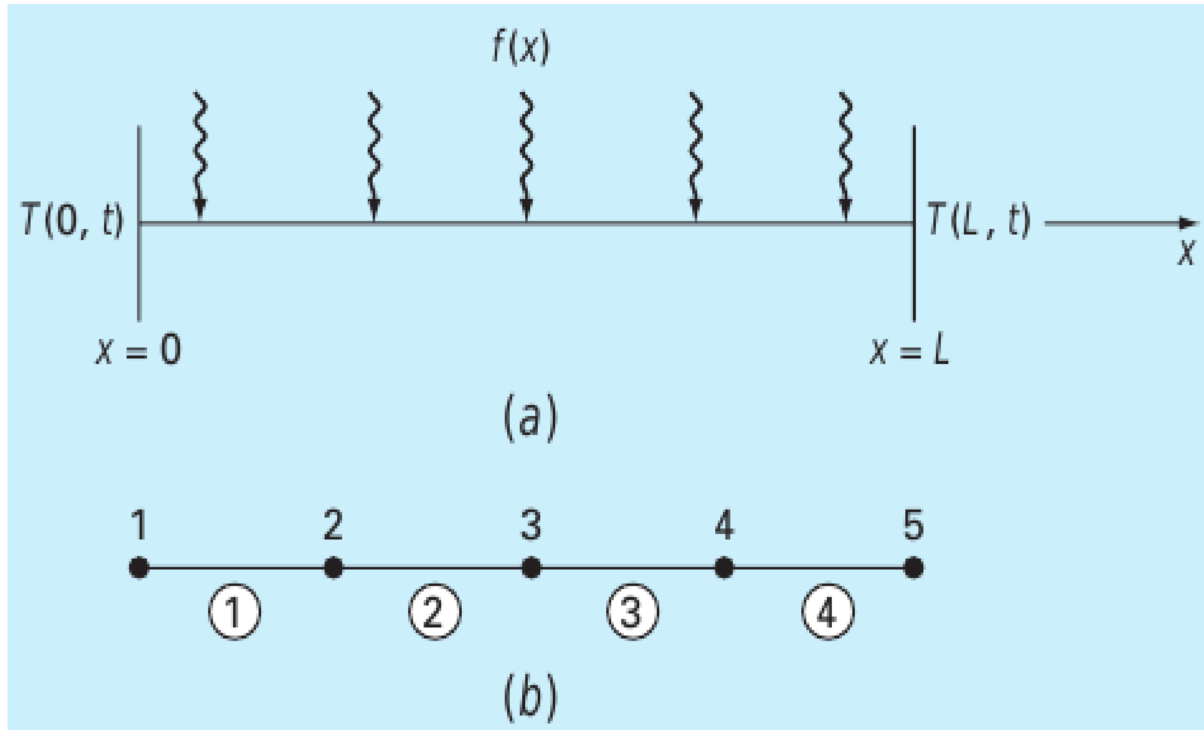
Los resultados de una solución, esto se puede visualizar en forma de tabla o gráfica. Además, las variables secundarias se pueden determinar y se mostrar. Aunque los pasos anteriores son muy generales, que son comunes a la mayoría de las implementaciones del método de elementos finitos.

EDP. Método de los elementos finitos

Aplicación del método de los elementos finitos en una dimensión

La figura muestra un sistema que puede ser modelado por una forma de la ecuación de Poisson unidimensional

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f(x) \qquad (9)$$



donde $f(x)$ = una función que define una fuente de calor a lo largo de la varilla y donde los extremos de la varilla se llevan a cabo a temperaturas fijas

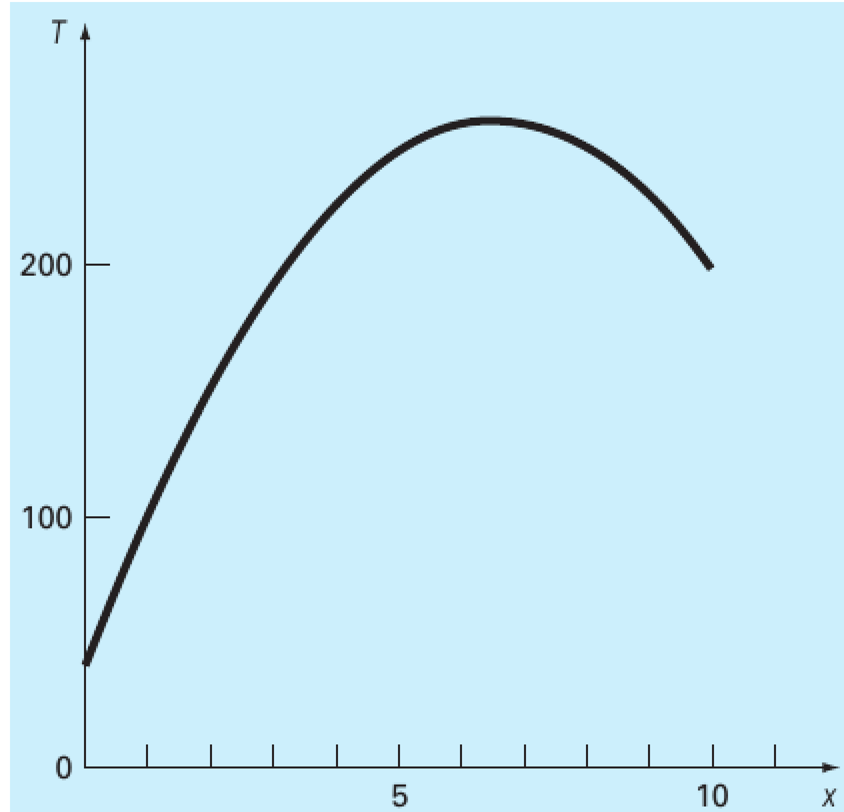
$$T(0,t) = T_1 \text{ y } T(L,t) = T_2$$

Observe que esto no es una ecuación diferencial parcial sino más bien es un EDO en un problema de frontera.

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

Descripción de problema.

$L=10\,cm$, $T(0,t)=40$ y $T(10,t)=200$ y fuente de calor uniforme $f(x)=10$.



Solución analítica.

Ecuación para resolver es $\frac{d^2T}{dx^2}=-10$.

Buscamos solución en forma

$$T=a\,x^2+b\,x+c \qquad (10)$$

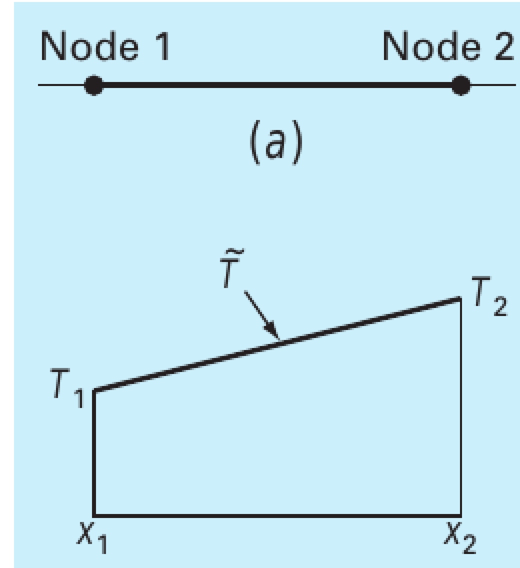
Entonces segunda derivada de (10) es $\frac{d^2T}{dx^2}=2a$. Por esto $a=-5$.

Usamos condición de frontera $x=0$. $40=-5(0)^2+b(0)+c$ => $c=40$

Usamos segundo condición de frontera $200=-5(10)^2+b(10)+40$ => $b=66$.

Entonces la solucione es $T=-5x^2+66x+40$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.



E1. Discretización.

4 elementos de **igual longitud** y **5 nodos**.

E2. Ecuaciones de los elementos.

Un elemento individual se muestra en la figura. La distribución de la temperatura para el elemento puede ser representada por la función de aproximación

$$\tilde{T} = N_1 T_1 + N_2 T_2 \qquad (11)$$

donde las **funciones de interpolación** son $N_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ y $N_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

La función de aproximación es una interpolación lineal entre los dos temperaturas nodales.

Hay una variedad de enfoques para el desarrollo de ecuación del elemento. (Por ejemplo, el método directo, los métodos variacionales. Debido a su aplicabilidad general en la ingeniería, vamos a usar **el método de residuos ponderados**.

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

E2. El método de los residuos ponderados.

La ecuación diferencial (9) puede ser re-expresado como $0=\frac{d^2T}{dx^2}+f(x)$

Sustituimos la solución aproximada (11) en esta ecuación. La ecuación (11) no es la solución exacta, por esto el lado izquierdo de la ecuación resultante no será cero, pero será igual a un residuo.

$$R=\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2}+f(x) \tag{12}$$

El método de residuos ponderados consiste en encontrar un mínimo para el residual de acuerdo a la fórmula general

$$\int_D R\,W_i\,dD=0 \qquad i=1,2,\ldots,m \tag{13}$$

donde D = el dominio de la solución y W_i = linealmente independientes funciones de ponderación.

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

Hay una variedad de opciones para la función de ponderación. El enfoque más común para el método de elementos finitos es emplear la funciones de interpolación de N_i como las funciones de ponderación. Cuando éstos se sustituyen en la ecuación (13), el resultado se conoce como el **método de Galerkin**

$$\int_D R\,N_i\,dD=0 \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Para nuestro 1D ejemplo

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2}+f(x)\right]N_i\,dx=0 \qquad i=1,2 \quad \text{o}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2}N_i(x)\,dx=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,N_i(x)\,dx \qquad i=1,2 \qquad (14)$$

Para simplificar (14) recordamos la formula de **integración por partes**

$$\int_a^b u\,dv=u\,v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

Si definimos $u = N_i(x)$ y $dv = (d^2 T / dx^2)\, dx$ parte derecha de (14) va

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} dx = N_i(x) \frac{d \tilde{T}}{dx}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d \tilde{T}}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \qquad i = 1, 2 \tag{15}$$

Tenemos la **reducción de derivada de orden 2 a una primera derivada.**

Evaluamos el primer término en el lado derecho de la (15) para $i = 1$.

$$N_1(x) \frac{d \tilde{T}}{dx}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = N_1(x_2) \frac{d \tilde{T}(x_2)}{dx} - N_1(x_1) \frac{d \tilde{T}(x_1)}{dx}$$

Recuerda que $N_1(x2) = 0$ y $N_1(x1) = 1$, y por lo tanto,

$$N_1(x) \frac{d \tilde{T}}{dx}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{-d \tilde{T}(x_1)}{dx}$$

Del mismo modo, para $i = 2$,

$$N_2(x) \frac{d \tilde{T}}{dx}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{d \tilde{T}(x_2)}{dx}$$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

Por lo tanto, el primer término en el lado derecho de la (15) representa las **condiciones naturales de contorno en los extremos de los elementos**.

Sustituimos los estos resultados en (14).

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) dx \quad i=1 \tag{16}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x) dx \quad i=2 \tag{17}$$

El termino de lado derecho para $i=1$ es $\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx$. Con (3) y (4)

$\frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_1}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1}(-T_1 + T_2)\cdot\frac{-1}{x_2 - x_1}$. Entonces

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_1}{dx}dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(T_1 - T_2)}{(x_2 - x_1)^2}dx = \frac{1}{x_2 - x_1}(T_1 - T_2)$$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

Sustituciones similares para $i=2$ nos dan

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\tilde{T}}{dx}\frac{dN_2}{dx}\,dx = \frac{1}{x_2-x_1}\left(-T_1+T_2\right)$$

Sustituimos estos resultados en (16) y (17). Obtenemos los ecuaciones de los elementos.

$$\underbrace{\frac{1}{x_2-x_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de propiedad de elementos}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{-dT(x_1)}{dx} \\ \dfrac{dT(x_2)}{dx} \end{pmatrix}}_{\text{Condiciones de frontera}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x)\,dx \\ \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x)\,dx \end{pmatrix}}_{\text{efectos externos}} \tag{18}$$

Ecuación del elemento para una varilla calentada

Planteamiento del problema. Emplear la ecu. (18) a desarrollar las ecuaciones de elementos para una varilla de 10 cm, con condiciones de contorno de $T(0,t)=40$ y $T(10,t)=200$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

y una fuente de calor uniforme de $f(x)=10$. 4 elementos del mismo tamaño de la longitud = 2.5 cm.

Solución. El término fuente de calor en la primera fila de la (18) se puede evaluar mediante la sustitución (3) $N_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$

$$\int_0^{2.5} 10\frac{2.5-x}{2.5-0}\,dx=12.5$$

Del mismo modo, la ecuación (3) puede ser sustituido en el término fuente de calor de la segunda fila de (18)

$$\int_0^{2.5} 10\frac{x-0}{2.5-0}\,dx=12.5$$

Estos resultados, junto con los demás valores de los parámetros se pueden sustituir en la ecuación (18)

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

$$0.4\,T_1 - 0.4\,T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_1) + 12.5 \quad \text{y}$$

$$-0.4\,T_1 + 0.4\,T_2 = \frac{dT}{dx}(x_2) + 12.5$$

Element	Node Numbers Local	Node Numbers Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4
4	1	4
	2	5

E3. Ensamble.

Antes de las ecuaciones de los elementos se ensamblan, un esquema de numeración global debe ser establecido para especificar la topología del sistema o la disposición espacial.

Esto define la conectividad de elementos de la malla. Para los problemas en dos y tres dimensiones esto es el único medio para especificar qué nodos pertenecen a qué elementos.

Una vez que se especifica la topología, la ecuación del elemento (18) se puede escribir para cada elemento utilizando las coordenadas globales. Luego se pueden añadir uno por uno de montar la matriz total del sistema. El proceso se representa en la figura.

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

$$
(a)\quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
(b)\quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 \; + 0.4 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & - 0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_3)/dx + 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
(c)\quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 \; + 0.4 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & - 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_4)/dx + 12.5 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
(d)\quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \; + 0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & - 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_5)/dx + 12.5 \end{Bmatrix}
$$

$$
(e)\quad \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ dT(x_5)/dx + 12.5 \end{Bmatrix}
$$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

E4. Condiciones de frontera

Tenga en cuenta que, cuando las ecuaciones se ensamblan, las condiciones de frontera internos cancelan. Por lo tanto, el resultado final para {F} en la figura (e) tiene condiciones de contorno sólo para el primero y el último nodos. Debido a T_1 y T_5 se dan, estas condiciones naturales en los extremos de la barra, $dT(x_1)/dx$ y $dT(x_5)/dx$, representan incógnitas. Por lo tanto, las ecuaciones pueden ser re-expresado como

$$
\begin{array}{lllllll}
\frac{dT}{dx}(x_1) & -0.4T_2 & & & & = & -3.5 \\
 & 0.8T_2 & -0.4T_3 & & & = & 41 \\
 & -0.4T_2 & +0.8T_3 & -0.4T_4 & & = & 25 \\
 & & -0.4T_3 & +0.8T_4 & & = & 105 \\
 & & & -0.4T_4 & -\frac{dT}{dx}(x_5) & = & -67.5
\end{array}
\qquad (19)
$$

Método de los elementos finitos. Ejemplo.

E5. Solución

La ecuación (19) puede resolverse para

$$\frac{dT}{dx}(x_1)=66\ ,\ \ T_2=173.75\ ,\ \ T_3=245\ ,\ \ T_4=253.75\ ,\ \ \frac{dT}{dx}(x_5)=-34$$

E6. Postprocesamiento

Los resultados se pueden visualizar gráficamente. La figura muestra los resultados de elementos finitos, junto con la solución exacta. Tenga en cuenta que el cálculo de elementos finitos captura la tendencia general de la solución exacta y, de hecho, proporciona una coincidencia exacta en los nodos. Sin embargo, existe una discrepancia en el interior de cada elemento debido a la naturaleza lineal de las funciones de forma.